

Variedades núcleo, extensividad y geometría de aillos

F. William Lawvere

Abstract

El papel de las operaciones de Frobenius en el análisis de espacios finitos, así como la geometría algebraica extendida sobre aillos, dependen en parte de variedades (inclusiones birkhoffianas de categorías algebraicas) que tienen tanto correflexiones como reflexiones y cuya categoría dual de espacios afines es extensiva. Incluso dentro de la categoría de esos aillos en los que $1 + 1 = 1$, no solo las retículas distributivas sino también las álgebras funcionales de geometría tropical (donde $x + 1 = 1$) y los aillos de dimensión de categorías preextensivas separables (donde $x + x^2 = x^2$) gozan de dichos aspectos. (Plática impartida en CT08, Calais.)

Geometría algebraica, geometría analítica, geometría lisa, y también la topología simplicial, gozan todas de la cohesión axiomática descrita en mi artículo reciente [4]. La teoría de cohesión apunta a asistir en el desarrollo de esos temas al revelar maneras características en las que sus categorías difieren de otras. (Tales consideraciones serán importantes para llevar a cabo el programa de 1973 de Grothendieck [2] para simplificar los fundamentos de la geometría algebraica.)

Una teoría axiomática a menudo captura más ejemplos de los que se tenía originalmente en mente. En el caso presente, no solo la generalización lisa (geometría diferencial sintética, (GDS)) sino también algunos semi-combinatorios son de interés. Algunos de estos pueden ser aproximados vía sitios de definición que pueden ser manejados de maneras muy

cercanamente análogas a las construcciones de geometría algebraica de Grothendieck. Incluso propiedades ultra-básicas de categorías cohesivas, tales como extensividad, pueden no ser ciertas en el sitio mismo; un paso modesto hacia el tratamiento de ese problema es el reconocimiento de algunas categorías algebraicas como *variedades núcleo* de otras. Pero recuerdo primero otro aspecto sobresaliente de muchos topos cohesivos que, aunque descubierta a través de su relevancia para ecuaciones diferenciales, apunta sin embargo hacia el poder de espacios de morfismos en la construcción de objetos combinatorios a partir de ingredientes simples.

1 El principio de Euler

Enfocarse en el papel de los espacios de morfismos para generar espacios revela un aspecto distinto de la geometría algebraica sobre K -aillos (un aspecto compartido por la geometría lisa en donde la categoría de álgebras consiste de anillos C^∞) que llamo *principio de Euler*. Él utilizó el hecho de que las macro-cantidades son representables como cocientes de infinitesimales. Podemos objetivar esto explotando el hecho de que la categoría de espacios tiene exponenciación. Considerando la teoría de K -aillos, sean

$$\begin{aligned} D &= \text{espec } K[\varepsilon] & \varepsilon^2 &= 0 \\ R &= \text{espec } K[t] \end{aligned}$$

donde $K[\varepsilon]$ es el módulo finitamente generado $K \times K$ con la multiplicación de Leibniz y donde $K[t]$ es el aillo monoide sobre $\{t^n\}$. Entonces los morfismos que preservan puntos $D \rightarrow D$ son en efecto cocientes, y R , el espacio de estos, es un retracto.

$$\begin{array}{ccc} R & \hookrightarrow & D^D \\ & \searrow 1_R & \downarrow \\ & & R \end{array}$$

Observamos que esto es cierto no solamente para $K = \text{los números reales}$, sino también, por ejemplo, para $K = 2$; incluso en ambientes

combinatorios los infinitesimales D tienen un papel definido, siendo los haces tangentes (espacios de morfismos especiales) de espacios afines todavía afines. El topos clasificante para K -aillos tiene como sitio al espectro de K -aillos finitamente presentados, y es cohesivo relativo al topos de aquellos objetos S para los cuales $S^D = S$. El principio de Euler puede ser utilizado para recuperar las álgebras finitamente presentadas a partir de las infinitesimales de manera precisa, y es entonces mucho más fuerte que el Nullstellensatz de Birkhoff que solo los representa salvo monomorfismo.

Para un ejemplo combinatorio cercanamente análogo, denotemos por D a una gráfica adecuada con solo un vértice en un topos adecuado de gráficas. El auto-exponencial de D contiene a la flecha genérica, la cual es un generador para el topos completo.

2 Extensividad y la topología cubierta ajena

Una categoría pequeña C con coproductos es extensiva [1] si y solo si la categoría de pregavillas que preservan productos es un topos $\mathcal{G}(C)$. Si C es la opuesta de la categoría de álgebras finitamente presentadas para una teoría algebraica, podemos referirnos en breve a toda la categoría de álgebras como *co-extensiva*; en caso de que C tenga límites finitos decimos que C es *l-extensiva* y observamos que tales categorías satisfacen la distributividad de productos sobre coproductos. El topos $\mathcal{G}(C)$ es el topos clasificante para cierto fortalecimiento de la teoría ecuacional. Para comprender qué clase de fortalecimiento, consideramos algunos ejemplos.

3 Aillos y generalizaciones

La categoría de aillos es co-extensiva; esto se ve de manera concreta vía particiones de la unidad mediante idempotentes ajenos: si $(s_i)_{i \in I}$ es una familia finita de elementos de un aillo para la cual $s_i s_j = 0$ para $i \neq j$ y $\sum s_i = 1$, entonces el aillo es de manera única un producto cartesiano de aillos más pequeños tales que s_i se vuelve 1 en el i -ésimo factor. Entonces un

posible fortalecimiento de la teoría ecuacional de aillos requiera conexidad en el sentido de que todas tales particiones sean triviales, a pesar de que el aillo mismo sea no-trivial.

Existen muchas generalizaciones concretas. Como C/X es extensiva siempre que C lo sea, es claro que la categoría de K -aillos es co-extensiva. Pero existen otros ejemplos de álgebra co-extensiva, inspirados en el caso de aillos, que no son de la forma simple “todos los L -aillos” para cualquier L . Los ejemplos obvios incluyen G -acciones sobre K -aillos donde G es cualquier grupo dado (o monoide o álgebra Lie). Sin embargo, existen subejemplos de estos, no tan obvios, que llamaré *variedades núcleo*.

4 Geometría algebraica en la que $1+1=1$

Geometría algebraica sobre aillos (no solo en los casos tradicionales $K = \mathbb{Z}$ o $K = \text{un campo}$) es una ayuda sugerida para entender no solo $K = \mathbb{N}$ sino también $K = 2$ (en donde $1 + 1 = 1$). Schanuel ha demostrado que los objetos simples en la categoría de aillos son los campos en el sentido usual, además de solo el ejemplo 2 mismo. Observamos que el ejemplo que proyectó a la teoría de anillos no era un anillo sino un 2-aillo, a saber, el sistema de ideales de un anillo. La clasificación de Schanuel [5] de los espacios en ciertas categorías lextensivas requirió un par de invariantes: una “característica de Euler” en el anillo $\mathbb{Z} \otimes B$ y también una “dimensión” en el 2-aillo $2 \otimes B$ derivado del aillo B de clases de isomorfismos de espacios. Como

$$\dim(X + Y) = \max(\dim X, \dim Y)$$

la suma es idempotente en el aillo dimensión, pero la multiplicación no lo es. (En casos simples los números de dimensión usuales pueden ser leídos de manera logarítmica.) Al nivel de álgebra abstracta, un aillo monoide sobre 2

$$2[M]$$

simplement consiste de todos los subconjuntos finitos del monoide, con el producto usual conjuntista y con unión como suma. En caso que M

sea un monoide conmutativo libre, este aillo monoide $2[M]$ es el aillo de polinomios correspondiente sobre 2; cualquier 2-aillo finito es un cociente de $2[M]$ para algún monoide finito M .

5 La inexactitud de los esquemas afines

La geometría algebraica construye categorías $\mathcal{X}$ de espacios a partir de categorías $\mathcal{A}$ de álgebras de tal manera que todo espacio tiene un álgebra de funciones y toda álgebra tiene un espacio espectral, una adjunción contravariante; la experiencia muestra que no es una dualidad en el sentido inocente de equivalencia. De manera más específica, las álgebras finitamente presentadas

$$C \subset \mathcal{A}^{\text{op}}$$

permiten representar $\mathcal{A}$ como los funtores exactos izquierdos en C y $\mathcal{X}$ como el subtopos del topos clasificante (que consiste de todos los funtores contravariantes en C), mientras que el encaje de Yoneda se Kan-extiende a $\text{espec} : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{X}$. La necesidad de un subtopos (i.e. de una topología de Grothendieck) se debe al hecho de que ni los “esquemas afines” C ni las pregavillas tienen los colímite geométricos correctos!

La co-extensividad del álgebra permite un primer paso para resolver el problema de colímites porque sugiere que podemos suponer que $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{G}(C)$, el topos de pregavillas que preservan productos. Debido a este fácil descarte de familias ajenas finitas el estudio de elecciones más profundas de topologías de Grothendieck se puede enfocar en cubiertas mediante morfismos individuales.

Aunque una categoría de álgebras es Barr-exacta, su opuesta C no lo es (incluso cuando es extensiva). Sin embargo esa categoría opuesta es confrontada con la exactitud pretopos de espacios vía la construcción espec . Conjeturo que en un sentido adecuado la lextensividad es toda la exactitud que estas dos categorías tienen en común, de manera que las categorías lextensivas forman la sombrilla común razonable más pequeña para esta construcción básica. A pesar de que los pretopos tienen propiedades de

exactitud que son claramente “buenas”, uno no debe concluir que C es “mala”; la categoría de objetos punteados en C soporta toda una categoría de módulos como objetos grupo abeliano en su opuesta (mientras que esa construcción puede fallar en un pretopos).

6 Variedades núcleo

Sigo a Birkhoff en llamar *variedad* a cualquier subcategoría de una categoría algebraica dada que es por derecho propio también una categoría algebraica, de tal manera que la inclusión está inducida por un morfismo suprayectivo de teorías. Existen típicamente no-variedades que son subcategorías algebraicas plenas, pero con la inclusión inducida mediante la introducción de inversos para operaciones dadas en lugar de por simplemente imponer identidades de operaciones dadas; una tal inclusión podría ser llamada “abierta” por analogía. Por ejemplo, la categoría de álgebras booleanas no es una variedad dentro de las retículas distributivas; ni siquiera es abierta porque las operaciones de retículas distributivas son todas preservadoras de orden. Por supuesto que es una variedad en otro ambiente obtenido mediante la adición de más operaciones, y es clasificada por un subtopos clasificador para retículas distributivas. Nuestra preocupación aquí es obtener alguna comprensión a través de ejemplos de la pregunta ¿cuándo es una variedad en una categoría algebraica extensiva también extensiva? En general, extensividad no es hereditaria en ese sentido, pero existe un enfoque específico a ciertas de esas subvariedades.

En una categoría extensiva los sumandos de X inducidos por un morfismo dado en un coproducto son de hecho productos fibrados. En una categoría algebraica opuesta estos productos fibrados son, por supuesto, coproductos amalgamados (productos tensoriales amalgamados en el caso de K -aillos). Entonces la co-extensividad de una variedad es fácilmente verificada si los colímites finitos allí concuerdan con los colímites en la categoría algebraica co-extensiva ambiente. Por supuesto que eso falla a menudo, pero existe una manera estándar de garantizarla.

Si un funtor tiene un adjunto derecho, entonces preserva coproductos. Entonces una teoría extensiva adicional surge si podemos encontrar, dentro de una categoría algebraica co-extensiva, una *variedad núcleo*, lo cual quiere decir una variedad cuya inclusión tiene un adjunto derecho adicional, porque entonces aquellas álgebras que satisfacen las identidades adicionales serán cerradas bajo el $\otimes$ ambiente. Gavin Wraith [6] estudió funtores algebraicos que tienen (además del adjunto izquierdo funtor libre relativo) también un adjunto derecho, pero como nos estamos limitando aquí a inclusiones plenas, en el caso de un solo tipo, un “núcleo” de esta clase está dado simplemente por un conjunto de ecuaciones unarias tal que, para cualquier álgebra, el suconjunto que las satisface es un álgebra. Como $K[t]$ es libre, su núcleo será de manera típica solamente K (incluso si suponemos que K mismo satisface las identidades adicionales); la nueva teoría algebraica está, como es usual, dada por la reflexión, no la corrección.

7 Puntos fijos de Frobenius en topos arbitrarios

Una manera particular de obtener una variedad núcleo es encontrar una operación unaria de una teoría, i.e. una operación cuya aplicación sea un álgebra de endomorfismos, y luego definir un núcleo que consista de todos sus puntos fijos. Por ejemplo, en la categoría de K -álgebra, donde K es un campo dado, potencias adecuadas son homomorfismos y de aquí que definen núcleos. Debido que estos adjuntos algebraicos también inducen operaciones adicionales en los topos geométricos correspondientes, se ve que las operaciones de Frobenius de la geometría algebraica tienen un análogo más bien preciso también en álgebra general. Existe una formulación independiente de la teoría algebraica particular: el centro de un topos (o de cualquier categoría) es el monoide conmutativo de endomorfismos naturales del funtor identidad; sea Q el centro considerado como un conjunto parcialmente ordenado bajo divisibilidad. El análisis de Frobenius de cada objeto es la pregavilla E -valuada en Q obtenida mediante extracción de sus puntos fijos.

8 Retículas distributivas, geometría tropical, aillos dimensión

Por supuesto que las ecuaciones que definen un núcleo no necesariamente involucran homomorfismos, son solamente las propiedades de cerradura del resultado que son requeridas. Por ejemplo, entre los 2-aillos podríamos considerar aquellos donde (no solo la suma sino también) la multiplicación es idempotente; sin embargo, $x + 1$ no es necesariamente idempotente incluso si x lo es, de manera que esta variedad no es una variedad núcleo. Pero si adjuntamos una segunda ecuación $x + 1 = 1$, encontramos que el conjunto de elemento en un 2-aillo que satisfacen

$$\begin{aligned}x^2 &= x \\x + 1 &= 1\end{aligned}$$

es cerrado bajo suma y multiplicación y que, además, la multiplicación es el ínfimo en el orden semirretícula dado por la suma. Esta variedad núcleo es la categoría algebraica de retículas distributivas.

¿Qué es la geometría algebraica sobre estas retículas distributivas? El topos clasificante pleno para la teoría algebraica es la categoría de pregavillas en la categoría C de conjuntos finitos parcialmente ordenados. El subtopos $\mathcal{G}(C)$ clasifica aquellas retículas distributivas que son “conexas” en tanto que

$$st = 0 \ \& \ s + t = 1 \quad \text{implica} \quad s = 1 \text{ o } t = 1.$$

Existen por supuesto subtopos todavía más pequeños (la mayoría de los cuales no clasifican variedades núcleo o incluso variedades ecuacionales). Los conjuntos simpliciales clasifican a las retículas distributivas totalmente ordenadas; en ese contexto, el espectro de una retícula distributiva es el nervio del conjunto parcialmente ordenado correspondiente. Intermedio está el análogo del topos de Zariski que clasifica retículas distributivas “locales”; es distinguido por el hecho de que el morfismo característico de la unidad es un homomorfismo de aillos de la retícula local genérica

en el objeto de valores de verdad en su topos. Recordemos que el topos topológico de Johnstone [3] fue un antídoto a su descubrimiento extraño de que el intervalo unitario clásico no es totalmente ordenado. Mientras que el hecho es probablemente mejor visto como resultado de un exceso de generalidad en la definición clásica de continuidad, pidiendo en consecuencia un monoide de endomorfismos del intervalo que sea más “manso” en el sentido de Grothendieck, un diagnóstico alternativo es que el uso de conjuntos simpliciales (como los objetos combinatorios cuya realización geométrica deba ser exacta) es demasiado restrictiva. Ciertamente, cualquier clase de intervalo unitario clásico es una retícula distributiva y entonces existe un buen funtor realización geométrica sobre el topos pleno de pregavillas de la categoría $\mathcal{C}$; debería ser posible determinar los subtopos que siguen recibiendo el adjunto derecho de esta realización.

Consideremos la ecuación $x + 1 = 1$ en sí (i.e. la condición $x \leq 1$); en un 2-aillo los elementos que satisfacen esta ecuación son cerrados bajo suma y multiplicación. Esta identidad implica que siempre que b divida a , uno también tiene $a \leq b$; entonces el álgebra libre en un generador x para la subcategoría puede ser calculado como consistente de solamente $0, \dots, x^n, \dots, x^2, x, x^0 = 1$; su espectro puede ser visualizado como un intervalo I (no una retícula) y el espectro de las álgebras libres puede ser visualizado como cubos I^n . Parece que una forma canónica para un elemento de un aillo monoide reducido más general puede ser obtenido al considerar una suma de un conjunto de monomios sin divisibilidades mutuas. (Puede uno, de manera alternativa, ver a I como una línea positiva extendida al leer la estructura de manera logarítmica; este ejemplo sugiere una simplificación de topos de la recientemente popular “geometría tropical”.)

La desigualdad “opuesta” $1 \leq x$ excluiría 0, pero si consideramos una ligera generalización

$$x \leq x^2, \quad (\text{i.e. } x + x^2 = x^2)$$

encontramos de nuevo una variedad núcleo en 2-aillos y entonces una geometría algebraica potencialmente importante. Un 2-aillo pertenece a esta variedad si para todo x existe una y para la cual $x + y = x^2$, porque

como en cualquier semi-retícula, si existe una demostración y de una desigualdad, entonces el más grande de los dos elementos comparados también servirá como demostración. El aillo dimensión de Schanuel de una categoría lextensiva se encontrará en esta variedad núcleo en caso de que todos los objetos sean separables porque el complemento y de la diagonal en x^2 produce, bajo el morfismo de B en $2 \otimes B$, una demostración de que $x \leq x^2$.

Referencias

- [1] Carboni, A., Pedicchio M-C., Rosicky, J., Syntactical characerization of various locally presentable categories, *J. Pure and Applied Algebra* 161(2001), 65-90.
- [2] Grothendieck, A., plática de coloquio sin publicar, University at Buffalo, Abril 1973.
- [3] Johnstone, P., On a topological topos, *Proc. London Math Soc.* 38(1979), 237-271.
- [4] Lawvere, F. W., Axiomatic cohesion, *Theory and Applications of Categories*, 19(2006), 41-49.
- [5] Schanuel, S. H., Negative sets have Euler caharacteristic and dimension, *Springer Lecture Notes in Mathematics*, 1488 (1991), 379-385.
- [6] Wraith, G. C., Algebras over Theories, *Colloq. Math.* 23(1971), 181-190.