

Una teoría elemental de la categoría de conjuntos*

F. W. Lawvere, 1964

Traducido* del inglés por Emilio Faro

Vigo, septiembre 2024

(Proc. N. A. S. Vol. 52, 1506-1511 (1964))

Adjuntamos ocho axiomas de primer orden a los axiomas de primer orden usuales de la teoría de una categoría abstracta de Eilenberg-Mac Lane, para obtener una teoría elemental con las siguientes propiedades: (a) Existe esencialmente sólo una categoría que satisface esos ocho axiomas junto con el axioma (no elemental) adicional de completitud, a saber, la categoría $\mathcal{S}$ de conjuntos y aplicaciones. Así pues, nuestra teoría distingue estructuralmente a $\mathcal{S}$ de otras categorías completas tales como la de espacios topológicos, grupos, anillos, conjuntos parcialmente ordenados, etc. (b) La teoría proporciona unos fundamentos para la teoría de números, análisis y gran parte de álgebra y topología a pesar de no definirse una relación $\in$ con las propiedades tradicionales. Así, parece que hemos demostrado parcialmente que, incluso en Fundamentos, no es la Sustancia sino la Forma invariante la portadora de la información matemática relevante.

Al igual que en la teoría general de categorías, nuestros términos no definidos son *aplicación*, *dominio*, *codominio*, y *composición*, siendo el primero simplemente un nombre para los elementos del universo de discurso. Toda aplicación tiene un único dominio y un único codominio, los cuales también son aplicaciones pero del tipo especial llamados *objetos*. Escribimos $A \xrightarrow{f} B$ si y sólo si A es el dominio de f y B es el codominio de f . Dado cualquier par f, g de aplicaciones tales que el codominio de f es el dominio de g , existe una única aplicación denotada por¹ gf y llamada la *composición* de f con g ; el dominio de gf es el dominio de f y su codominio es el codominio de g . La composición es asociativa y los objetos actúan como elementos

*En esta traducción, los textos que aparecen en color azul son aclaraciones introducidas por el traductor, que no aparecen en el original. (N. del T.)

¹El original usa la notación diagramática, fg , que hemos cambiado por la notación algebraica actual, gf , para mayor comodidad del estudiante. (N. del T.)

neutros respecto a ella. Una aplicación es un isomorfismo si y sólo si tiene una inversa por ambos lados.

AXIOMA 1 (Raíces finitas). Existe un objeto terminal, 1 , y un objeto inicial, 0 . Todo par de objetos A_1, A_2 tiene un producto con proyecciones $A_1 \times A_2 \xrightarrow{p_k} A_k$ y una suma con inyecciones $A_k \xrightarrow{i_k} A_1 + A_2$ que satisfacen las propiedades universales usuales. Todo par de aplicaciones $A \xrightarrow{f} B$ tiene un igualador $K \rightarrow A$ y un coigualador $B \rightarrow Q$ que satisfacen las propiedades universales usuales.

Definición 1: x es un elemento de A si y sólo si $1 \xrightarrow{x} A$. (Usamos para esto la notación usual $x \in A$ así como la noción más general de pertenencia definida más abajo, a pesar de que esas relaciones tienen pocas propiedades formales en común con las tradicionales de la teoría de conjuntos.)

AXIOMA 2 (Exponenciación). Para cualquier par de objetos A, B existe un objeto B^A y una aplicación de evaluación $A \times B^A \xrightarrow{e} B$ tal que dado cualquier objeto X y cualquier aplicación $A \times X \xrightarrow{f} B$, existe una única $X \xrightarrow{h} B^A$ tal que $e(A \times h) = f$.

Aquí $A \times h$ se refiere a la extensión funtorial natural de la operación de producto de objetos a aplicaciones; tal extensión también existe para las operaciones de suma y exponenciación. Por supuesto, todas esas operaciones están bien definidas salvo un isomorfismo natural único. Se deduce fácilmente de ello que los elementos de un producto son pares ordenados, que los valores de un igualador son precisamente los elementos en los que las dos aplicaciones coinciden y que los elementos de B^A están en correspondencia biyectiva canónica y natural con las aplicaciones $A \rightarrow B$. La naturaleza de los elementos de una suma o de un coigualador no es tan fácil de descubrir, pero será aclarada más abajo. Las leyes usuales de los exponentes se cumplen (salvo isomorfismo canónico) y la existencia de exponenciación implica que los productos son distributivos respecto a las sumas.

AXIOMA 3. Existe un objeto N junto con aplicaciones $1 \xrightarrow{z} N \xrightarrow{s} N$ tales que dado cualquier objeto X junto con aplicaciones $1 \xrightarrow{x_0} X \xrightarrow{t} X$, existe una única aplicación $N \xrightarrow{x} X$ tal que $x_0 = xz$ y $tx = xs$.

Claramente, salvo isomorfismo, sólo existe un tal sistema $1 \xrightarrow{z} N \xrightarrow{s} N$. Las aplicaciones $N \rightarrow X$ se llaman *sucesiones*, y de la sucesión x del axioma se dice que está definida por *recursión simple* a partir de los datos x_0, t . Por supuesto, en matemáticas necesitamos tipos más complicados de recursión, por lo que es afortunado que podamos demostrar

TEOREMA 1 (Recursión primitiva). Dadas aplicaciones

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{f_0} B \\ N \times A \times B &\xrightarrow{u} B \end{aligned}$$

existe una aplicación

$$N \times A \xrightarrow{f} B$$

tal que para cualesquiera $a \in A$, $n \in N$ se tiene

$$\begin{aligned} f\langle 0, a \rangle &= f_0 a \\ f\langle sn, a \rangle &= u\langle n, a, f\langle n, a \rangle \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{\langle 0, a \rangle} & N \times A & & 1 & \xrightarrow{\langle n, a \rangle} & N \times A & & 1 & \xrightarrow{\langle sn, a \rangle} & N \times A \\ a \downarrow & & \downarrow f & & \searrow f\langle n, a \rangle & & \downarrow f & & \downarrow \langle n, a, f\langle n, a \rangle \rangle & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{f_0} & B & & B & & N \times A \times B & \xrightarrow{u} & B \end{array}$$

Evidentemente en la ecuación $f\langle 0, a \rangle = f_0 a$ el autor denota por 0 el elemento de N previamente denotado z (¿errata?).

La demostración es una aplicación inmediata del axioma 2, el axioma 3 y la existencia de productos del axioma 1. El siguiente axioma implica que la f del teorema es única.

AXIOMA 4 (1 es un generador). Si dos aplicaciones $A \xrightarrow[g]{f} B$ son diferentes entonces existe un elemento $x \in A$ tal que $fx \neq gx$.

AXIOMA 5 (Axioma de la Elección). Si el dominio de f tiene elementos entonces existe una g tal que $fgf = f$.

La independencia del axioma de la elección es fácil de ver en nuestra teoría porque la categoría $\mathcal{O}$ de conjuntos parcialmente ordenados y aplicaciones que preservan el orden satisface los otros siete axiomas pero no el axioma 5. El mismo ejemplo muestra que el uso del axioma de la elección es esencial incluso en la demostración de proposiciones tan básicas como la Proposición 2 de más abajo.

PROPOSICIÓN 1. $1 + 1$ es un cogenerador.

Definición 2: a es un subconjunto de A si y sólo si a es un monomorfismo con codominio A .

Definición 3 (Pertenencia): $x \in a$ si y sólo si para algún (único) A , x es un elemento de A , a es un subconjunto de A , y existe $\bar{x}$ tal que $x = a\bar{x}$.

Definición 4 (Inclusión): $a \subseteq b$ si y sólo si a y b son ambos subconjuntos del mismo conjunto y para algún h , $a = bh$.

PROPOSICIÓN 2. Si a y b son subconjuntos del mismo conjunto, entonces

$$a \subseteq b \Leftrightarrow \forall x[x \in a \Rightarrow x \in b].$$

AXIOMA 6. Si A no es un objeto inicial entonces A tiene elementos.

AXIOMA 7. Un elemento de una suma es miembro de una de las inyecciones.

AXIOMA 8. Existe un objeto con más de un elemento.

Esto completa la lista de axiomas. El axioma 8 es claramente independiente puesto que los axiomas 1-7 son satisfechos por la categoría que tiene solamente una aplicación.

PROPOSICIÓN 3. $x \notin 0$.

PROPOSICIÓN 4. $1 + 1 = 2$. Esto es, las dos inyecciones $1 \xrightarrow{i_k} 1 + 1$ son diferentes y $1 + 1$ no tiene otros elementos.

PROPOSICIÓN 5. En $A + B$ los subconjuntos i_A e i_B no tienen elementos comunes.

El axioma 7 implica que para toda aplicación $1 \xrightarrow{\eta} A + B$ o bien existe $h : 1 \rightarrow A$ tal que $\eta = i_A h$ o bien existe $k : 1 \rightarrow B$ tal que $\eta = i_B k$,

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \exists h \nearrow & & \searrow i_A \\ 1 & \xrightarrow{\eta} & A + B \end{array} \quad \text{o bien:} \quad \begin{array}{ccc} & B & \\ \exists k \nearrow & & \searrow i_B \\ 1 & \xrightarrow{\eta} & A + B \end{array}$$

Esta proposición nos dice que no se pueden dar ambos (todo elemento $1 \rightarrow A + B$ se factoriza o bien por i_A o bien por i_B).

TEOREMA 2. N cumple todos los postulados de Peano.

TEOREMA 3 (Coimagen regular $\cong$ Imagen regular). Para toda aplicación f , sea q el coigualador de $p_0 k$ y $p_1 k$, donde k es el igualador de $f p_0$ y $f p_1$ y sea q^* el igualador de $k^* i_0$ y $k^* i_1$ donde k^* es el coigualador de $i_0 f$ e $i_1 f$ (aquí las p y las i son proyecciones e inyecciones)

$$\begin{array}{ccccccc} K & \xrightarrow{k} & A \times A & \xrightarrow[p_1]{p_0} & A & \xrightarrow{f} & B \xrightarrow[i_1]{i_0} B + B \xrightarrow{k^*} K^* \\ & & & & \downarrow q & & \uparrow q^* \\ & & & & I^* & \xrightarrow{h} & I \end{array}$$

Entonces la aplicación canónica h en el diagrama anterior es un isomorfismo. En consecuencia podemos suponer $I^* = h = I$ y referirnos a la ecuación $f = q^* q$ como la factorización de f por su imagen.

Definición 5: ϕ es la función característica de a , donde a es un subconjunto de X , si y sólo si $X \xrightarrow{\phi} 2$ y para cada $x \in X$, $\phi x = i_1$ si y sólo si $x \in a$.

Esto es equivalente a decir que el subconjunto a es el pullback de $i_1 : 1 \rightarrow 2$ a lo largo de ϕ , es decir que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ a \downarrow & \lrcorner & \downarrow i_1 \\ X & \xrightarrow{\phi} & 2 \end{array}$$

es un pullback (o, equivalentemente, que a es el igualador del par $(\phi, i_1 \top_X)$ donde denotamos por $\top_X$ a la única aplicación de X a 1).

Aquí estamos suponiendo que en cualquier discusión acerca de funciones características se elegirán nombres estándar para las dos inyecciones $1 \rightarrow 2$. Usando igualadores, está claro que cada $X \rightarrow 2$ es la función característica de algún subconjunto². Recíprocamente, el teorema 5 establece que cada subconjunto tiene una función característica. Para demostrarlo primero necesitamos saber que (en cualquier modelo de nuestra teoría) existen ciertas uniones infinitas, a saber, existe la unión de una familia cualquiera de subobjetos de un conjunto dado que tiene las propiedades de que cada subconjunto en la familia tiene una función característica y que existe (en el modelo) una única aplicación α que parametriza a la familia.

TEOREMA 4. *Para cada aplicación $I \xrightarrow{\alpha} 2^X$ existe un subconjunto $\cup \alpha \xrightarrow{a} X$ tal que para cualquier $x \in X$ se tiene que $x \in a$ si y sólo si existe $j \in I$ tal que $x \in \alpha_j$, donde α_j es el subconjunto de X cuya función característica corresponde (según el axioma 2) al elemento α_j de 2^X .*

Observación: Dado $I \xrightarrow{\alpha} 2^X$ es fácil construir el subconjunto $\Sigma \alpha \rightarrow X \times I$ (cuyos elementos son justamente los pares $\langle x, j \rangle$ para los que $x \in \alpha_j$) y el subconjunto $\Pi \alpha \rightarrow (\Sigma \alpha)^I$ que consiste en todas las “funciones de elección” $I \rightarrow \Sigma \alpha$. Si los valores de α son no vacíos entonces existe al menos una tal “función de elección” la cual al componerla con la proyección nos da una aplicación $I \xrightarrow{f} X$ tal que $fj \in \alpha_j$ para todo $j \in I$.

TEOREMA 5. *Cada subconjunto $A \xrightarrow{a} X$ tiene un complemento $A' \xrightarrow{a'} X$ en el sentido de que la aplicación inducida $A + A' \rightarrow X$ es un isomorfismo³. En consecuencia todo subconjunto tiene una función característica.⁴*

La idea de la demostración del teorema 5 es definir a' como la unión de todos aquellos subconjuntos de X que tienen funciones características y que no intersecan a a . Para completar la demostración usamos un lema que establece que existe al menos un tal subconjunto que contiene como elemento a cualquier x de X que cumpla $x \notin a$.

²Toda $r : X \rightarrow 2$ es la función característica del subconjunto obtenido como el igualador de r y la composición de la única $T_X : X \rightarrow 1$ con la inclusión $i_1 : 1 \rightarrow 2$ usada para definir función característica. (N. del T.)

³Si denotamos Φ ese isomorfismo, las propiedades que sirven para caracterizarlo son $\Phi i_A = a$ y $\Phi i_{A'} = a'$, o, equivalentemente, $\Phi^{-1}a = i_A$ y $\Phi^{-1}a' = i_{A'}$. (N. del T.)

⁴La función característica $\chi_a : X \rightarrow 2$ del subconjunto $A \xrightarrow{a} X$ se puede definir como la composición $\chi_a = \varphi_A \Phi^{-1} : X \xrightarrow{\Phi^{-1}} A + A' \xrightarrow{\varphi_A} 1 + 1 = 2$ donde φ_A es la aplicación caracterizada por las propiedades $\varphi_A i_A = i_1 T_A$ y $\varphi_A i_{A'} = i_0 T_{A'}$. Es entonces sencillo demostrar que a es el pullback de $i_1 : 1 \rightarrow 2$ a lo largo de χ_a o, equivalentemente, el igualador de $(i_1 T_X, \chi_a)$; por un lado estas dos aplicaciones coinciden en a ($\chi_a a = \varphi_A \Phi^{-1}a = \varphi_A i_A = i_1 T_A = i_1 T_X a$) y por otro lado, para todo elemento de X , $\eta : 1 \rightarrow X$, el elemento $\Phi^{-1}\eta$ de $A + A'$ o está en A (se factoriza por i_A) o está en A' (se factoriza por $i_{A'}$). Pero esto último contradiría el hecho de que el 2 tiene dos elementos distintos, $i_1 \neq i_0$ ya que implicaría (ver el comentario que sigue a la proposición 5) que existe $k : 1 \rightarrow A'$ tal que $\Phi^{-1}\eta = i_{A'}k$ y teniendo en cuenta que la composición $T_{A'}k$ es una identidad ($1 \xrightarrow{k} A' \xrightarrow{T_{A'}} 1$) tendríamos $i_1 = \chi_a \eta = \varphi_A \Phi^{-1}\eta = \varphi_A i_{A'}k = i_0 T_{A'}k = i_0$. (N. del T.)

El hecho que se establece en el siguiente teorema acerca de los coigualadores en $\mathcal{S}$ se demostró previamente ser característico de las categorías “algebraicas” [2]. Para la demostración en nuestra presente teoría necesitamos lemas que garanticen la existencia de la aplicación “singleton” $A \rightarrow 2^A$ y la del funtor covariante (que en morfismos es) imagen-directa (y que en objetos es) potencia de un conjunto⁵.

En la terminología del artículo precedente [2] el enunciado del teorema 6 es “toda precongruencia es una congruencia”. Antes de enunciar el teorema damos las definiciones de los conceptos relevantes que tienen significado en una categoría arbitraria y por tanto también en cualquier modelo de nuestra teoría.

Definición 6 Un par de aplicaciones $R \xrightarrow[f_1]{f_0} A$ es

reflexivo si y sólo si $\exists d[A \xrightarrow{d} R \ \& \ f_0 d = A = f_1 d]$

simétrico si y sólo si $\exists t[R \xrightarrow{t} R \ \& \ f_0 t = f_1 \ \& \ f_1 t = f_0]$

transitivo si y sólo si $\forall h_0 \forall h_1 [X \xrightarrow[h_1]{h_0} R \ \& \ f_1 h_0 = f_0 h_1 \Rightarrow \exists u[f_0 u = f_0 h_0 \ \& \ f_1 u = f_1 h_1]]$

una *relación* si y sólo si $\forall y \forall y' [(f_0 y = f_0 y' \ \& \ f_1 y = f_1 y') \Rightarrow y = y']$.

Por tanto en esta teoría $R \xrightarrow[f_1]{f_0} A$ es una relación si y sólo si la aplicación

inducida $R \xrightarrow{\langle f_0, f_1 \rangle} A \times A$ es un subconjunto de $A \times A$.

Puesto que las condiciones que aparecen en la definición 6 son predicados de la lógica de primer orden, pueden expresarse también categóricamente en términos de propiedades universales o diagramas conmutativos. Esto es lo que hace el autor para el concepto de *relación* en la frase anterior (que sigue inmediatamente a la definición). Los otros tres conceptos pueden definirse cada uno de ellos como la existencia de una aplicación especial al dominio del subconjunto $f : R \hookrightarrow A^2$:

la aplicación *reflexividad*, $d : A \rightarrow R \mid fd = \Delta$,
la aplicación *simetría*, $s : R \rightarrow R \mid fs = \tau f$,
y la aplicación *transitividad*, $t : R \times_A R \rightarrow R \mid ft = \langle f_0 e_0, f_1 e_1 \rangle$.

TEOREMA 6. Si $R \xrightarrow[f_1]{f_0} A$ es una relación reflexiva, simétrica y transitiva entonces $f = \langle f_0, f_1 \rangle$ es el igualador de qp_0 y qp_1 , donde q es el coigualador de f_0 y f_1 y p_0, p_1 son las proyecciones.

⁵En otras palabras, el funtor que asocia a cada conjunto X su “potencia” 2^X y a cada aplicación $f : X \rightarrow Y$ la función “imagen directa”, $f_* : 2^X \rightarrow 2^Y$ que lleva cada subconjunto $A \subseteq X$ a su imagen directa $f_*(A) = “f(A)” = \{f(x) \mid x \in A\}$. (N. del T.)

El método de demostración es construir la aplicación de partición $A \rightarrow 2^A$.

La aplicación de partición $\psi : A \rightarrow 2^A$ es la aplicación asociada (por la definición de exponenciación) a la función característica del subobjeto $f : R \hookrightarrow A \times A$, $\chi_f : A \times A \rightarrow 2$. El método de demostración —cabe añadir— es demostrar que f_0 y f_1 constituyen el par núcleo de ψ ,⁶ para lo cual se usa que f es una relación de equivalencia. Hecho eso, se deduce ante todo que, por la propiedad de coigualador de q y el hecho de que ψ coiguala a f_0 y f_1 (por constituir éstas su par núcleo), la función de partición se factoriza por q . De ello se sigue fácilmente que f_0 y f_1 constituyen también el par núcleo de q , lo cual es equivalente a la propuesta propiedad de igualador de f .

Observación: Del teorema 6 se deduce rápidamente que el coigualador de cualquier par de aplicaciones también es el coigualador de su complección RST⁷. Esta última puede construirse algo más “a la manera de elementos” usando N .

Finalmente, deducimos el prometido teorema de completitud de un metateorema más general sobre los modelos de nuestra teoría haciendo uso de propiedades bien conocidas de los funtores [3, 4].

METATEOREMA. Sea $\mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{C}'$ un funtor tal que ambas $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C}'$ satisfacen los ocho axiomas y

- (1) ambas $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C}'$ tienen la propiedad de que para cada objeto A , el retículo de subobjetos de A es completo,
- (2) T tiene un adjunto por la izquierda $\check{T}$,
- (3) para cada A en $\mathbf{C}$ la aplicación inducida $\mathbf{C}(1, A) \rightarrow \mathbf{C}'(T1, TA)$ es sobreyectiva, donde $\mathbf{C}(B, A)$ significa el conjunto de aplicaciones $B \rightarrow A$ en $\mathbf{C}$.

Entonces T es una equivalencia de categorías, esto es, $\check{T}T$ y $T\check{T}$ son equivalente de forma natural a sus respectivos funtores identidad.

Tomando $\mathbf{C}' = \mathcal{S}$, $T = \mathbf{C}(1, -)$ y $\check{T}\mathcal{S} = \sum_{\mathcal{S}} 1$, tenemos el

COROLARIO. Si $\mathbf{C}$ es una categoría completa que satisface los ocho axiomas entonces $\mathbf{C}$ es equivalente a $\mathcal{S}$.

Aquí la completitud tiene el significado usual en la teoría de categorías, a saber, que existen productos y sumas infinitos indicadas por cualquier conjunto de índices. La medida en que la completitud puede fallar está indicada por el hecho de que el conjunto de todas las aplicaciones entre conjuntos de rango menor que $\omega + \omega$ es un modelo de nuestra teoría. En realidad, ninguna teoría de primer orden puede garantizar siquiera que exista la operación $A \rightsquigarrow \sum_N A$, pues es sencillo ver que cualquier

⁶Ver, por ejemplo F. Borceux *Handbook of Categorical Algebra*, Vol III, proposición 5.9.6 (págs. 331-332). (N. del T.)

⁷En el original, “RST hull” que se entiende como “complección Reflexivo-Simétrica-Transitiva” de dos aplicaciones $g_1, g_2 : E \rightarrow X$ (o la menor relación de equivalencia en X en la que son equivalentes todos los pares $\langle g_1(e), g_2(e) \rangle$ para $e \in E$). (N. del T.)

categoría no trivial en la que exista esta operación debe ser no numerable (por supuesto, ese funtor es equivalente a $A \rightsquigarrow N \times A$ cuando existe).

Es fácil añadir a nuestra teoría axiomas que garanticen la existencia de cardinales mucho más grandes que $\aleph_\omega$, aunque esos casi nunca se necesitan, digamos, en Análisis. (Pero tales axiomas excluirían por lo menos el modelo del párrafo anterior.) Sin embargo es el sentimiento del autor que cuando uno quiere ir sustancialmente más allá de lo que se puede hacer en la teoría aquí presentada, unos fundamentos más satisfactorios incluirían una teoría de la categoría de categorías.

* Esta investigación fue financiada parcialmente por el contrato núm AFOSR-520-64 y por una beca pos-doctoral de la OTAN.

¹ Eilenberg, S., and S. Mac Lane, "General theory of natural equivalences," *Trans. Am. Math. Soc.*, **58**, 231-294 (1945).

² Lawvere, F. W., "Functorial semantics of algebraic theories," *estos PROCEEDINGS*, **50**, 869-872 (1963).

³ Kan, D. M., "Adjoint functors," *Trans. Am. Math. Soc.*, **87**, 294-329 (1958).

⁴ Freyd, P. J. *Abelian categories* (New York: Harper & Row, 1964).