

Operadores Lógicos

F. W. Lawvere, Buffalo 1987
(Apuntes para la asignatura “Linear Algebra 309”)

Traducción libre del inglés por Emilio Faro

Vigo, julio 2024

1 Los operadores básicos y sus reglas de inferencia

Aunque las proposiciones básicas de las matemáticas son las ecuaciones, muchas de las proposiciones de interés tienen una estructura más complicada. Con frecuencia esta estructura más complicada viene expresada con las palabras que rodean a las ecuaciones, pero para dar más relieve a esta estructura es útil introducir algunos símbolos “lógicos” más allá del simple signo de igualdad, “=”. Estos símbolos son:

$$\wedge, \vee, \mathbf{V}, \mathbf{F},$$

$$\exists, \forall, \Rightarrow, \neg.$$

Aquí tomamos “**V**” y “**F**” como dos proposiciones particulares especiales que tienen el significado respectivo de “verdad” y “falso”. Todos estos símbolos representan *operadores lógicos* en el sentido de que se usan como operaciones para construir proposiciones más complicadas a partir de otras más sencillas (normalmente empezando con las ecuaciones como las proposiciones más sencillas de todas, aunque, por supuesto, las propias ecuaciones pueden ser ya bastante complicadas).

Además de aquellos símbolos lógicos se utiliza también el símbolo de deducción “ $\vdash$ ”, que no se utiliza para formar nuevas proposiciones sino que se utiliza para expresar una relación particular entre dos proposiciones dadas. Concretamente, si A y B son proposiciones, indicaremos por $A \vdash B$ el hecho de que B se deduce de A . Mediante este símbolo podemos expresar de forma

sucinta las definiciones de los símbolos presentados más arriba, y mediante las propiedades de la deducción de *reflexividad* y *transitividad*¹ (las cuales son propiedades básicas dadas *a priori*) podemos demostrar la equivalencia entre varias formas de esas definiciones.

Hay una analogía evidente entre estas dos propiedades básicas y la existencia de identidades y composición en una categoría. Efectivamente, se puede comprobar que

Proposición 1.1

Si tomamos las proposiciones de un sistema matemático particular como objetos y decimos que de una proposición a otra existe una flecha precisamente cuando la segunda proposición se deduce de la primera, las propiedades reflexiva y transitiva de las proposiciones pueden interpretarse como la existencia de identidades y de composición y se obtiene de esta manera una categoría, que llamamos la categoría de las proposiciones de dicho sistema.

2 Conjunción, $\wedge$

Dadas proposiciones A , B , denotamos $A \wedge B$ (léase “ A y B ”) aquella única proposición que tiene la *propiedad universal* de que de ella se deduce A y se deduce B , es decir tal que...

- De $A \wedge B$ se deduce A y se deduce B : $A \wedge B \vdash A$ y $A \wedge B \vdash B$.
- Si C es otra proposición de la que también se deducen A y B entonces de C se deduce $A \wedge B$: Si $C \vdash A$ y $C \vdash B$ entonces $C \vdash A \wedge B$.

Nótese el parecido de esta propiedad universal con la propiedad universal de un producto cartesiano. Efectivamente, la conjunción es un producto cartesiano:

Ejercicio 2.1

Demuéstrese que en la categoría de las proposiciones, la conjunción de dos proposiciones tiene estructura de producto cartesiano.

¹Es decir, el hecho de que para toda proposición A se cumple $A \vdash A$ (reflexividad) y que para cualesquiera proposiciones A , B , C , si $A \vdash B$ y $B \vdash C$ entonces $A \vdash C$ (transitividad).

Usando la propiedad transitiva de la deducción es fácil demostrar que la primera parte de la definición de la conjunción implica la siguientes reglas de inferencia que gobiernan su uso:

Si $C \vdash A \wedge B$ entonces $C \vdash A$ y $C \vdash B$,

que es el recíproco de la segunda parte,

Si $C \vdash A$ y $C \vdash B$ entonces $C \vdash A \wedge B$.

En consecuencia, la conjunción verifica que para cualesquiera proposiciones A, B, C ,

$$\boxed{C \vdash A \wedge B \text{ si y sólo si } C \vdash A \text{ y } C \vdash B}$$

lo cual expresamos simbólicamente mediante la siguiente notación “fraccional” o de *adjunción*:

$$\frac{C \vdash A \wedge B}{C \vdash A, C \vdash B}, \quad (1)$$

que siempre indicará que el “numerador” es equivalente al “denominador”.

Esta forma de la definición, aunque equivalente a la anterior, es preferible por varias razones. Vamos ahora a analizar sus dos aspectos (el “si” y el “sólo si”) mediante las propiedades reflexiva y transitiva de la deducción para demostrar que es equivalente a la formulación de la propiedad universal dada al principio y también que es equivalente a cuatro importantes reglas de inferencia.

1. En el caso particular en que C es la propia proposición $A \wedge B$, la adjunción anterior nos dice:

$$\frac{A \wedge B \vdash A \wedge B}{A \wedge B \vdash A, A \wedge B \vdash B}$$

de lo cual, dado que el numerador se cumple por la reflexividad de la deducción, se desprende que de $A \wedge B$ se deducen tanto A como B , es decir, obtenemos la primera parte de la definición dada al principio. Ha de observarse que de esto se deduce la implicación “de arriba hacia abajo” de la adjunción sin más que tener en cuenta la transitividad de la deducción.

2. Para analizar en forma similar el otro aspecto (“de abajo hacia arriba”) de la definición hemos de dar dos pasos. El primero es comprobar que según la definición, para toda proposición C se cumple $C \vdash C \wedge C$. Esto se comprueba poniendo en la definición $A = B = C$ con lo cual obtenemos

$$\frac{C \vdash C \wedge C}{C \vdash C, C \vdash C}$$

donde el denominador se cumple (de nuevo por reflexividad) y por tanto también se cumple el numerador. El segundo paso es comprobar que se puede hacer la conjunción de dos deducciones y obtener otra deducción de manera que de la definición se deduce la siguiente regla de inferencia: dadas proposiciones A, B, C, D ,

$$\boxed{\text{Si } A \vdash C \text{ y } B \vdash D \text{ entonces } A \wedge B \vdash C \wedge D}.$$

Para comprobar esto se combinan por reflexividad las deducciones ya demostradas $A \wedge B \vdash A$ y $A \wedge B \vdash B$ con las hipótesis $A \vdash C$ y $B \vdash D$, de forma que

$$A \wedge B \vdash A \vdash C, \quad A \wedge B \vdash B \vdash D$$

es decir,

$$A \wedge B \vdash C, \quad A \wedge B \vdash D,$$

y aplicando la definición queda demostrada la tesis: $A \wedge B \vdash C \wedge D$.

Finalmente ha de observarse aquí también que de las dos últimas reglas de inferencia se deduce la implicación “de abajo hacia arriba” de la adjunción: si $C \vdash A$ y $C \vdash B$, por conjunción tenemos $C \wedge C \vdash A \wedge B$ y aplicando la transitividad a $C \vdash C \wedge C \vdash A \wedge B$ obtenemos $C \vdash A \wedge B$.

En conclusión, hemos demostrado que la definición de la conjunción de proposiciones que hemos dado mediante una propiedad universal es equivalente a las siguientes cuatro reglas de inferencia:

$$\boxed{A \wedge B \vdash A}, \quad \boxed{A \wedge B \vdash B}, \quad \boxed{A \vdash A \wedge A}, \text{ y}$$

$$\boxed{\text{Si } A \vdash C \text{ y } B \vdash D \text{ entonces } A \wedge B \vdash C \wedge D}.$$

Puesto que todo el mundo conoce de entrada el significado de la conjunción, el esquema de análisis que acabamos de hacer puede parecer innecesario e incluso pedante. Sin embargo es un análisis extremadamente importante y del que es necesario comprender cada detalle porque se aplicará a conceptos mucho menos obvios en muchas otras ramas de las matemáticas. En verdad, un análisis análogo puede llevarse a cabo para cualquier concepto matemático definido mediante una propiedad universal expresada mediante una adjunción.

3 Propiedades de las proposiciones básicas $\mathbf{V}$ y $\mathbf{F}$

La proposición básica $\mathbf{V}$ tiene propiedades análogas a las de la cantidad unitaria o unidad, 1. Está caracterizada por la propiedad de que para cualquier proposición A se cumple

$$A \vdash \mathbf{V},$$

es decir, la verdad es el objeto final de la categoría de las proposiciones. Además esto implica que $\mathbf{V}$ es una proposición “neutra” para la conjunción al igual que el 1 es neutro para la multiplicación:

Proposición 3.1

Para toda proposición A se cumplen

$$A \vdash A \wedge \mathbf{V}, \text{ y } A \wedge \mathbf{V} \vdash A.$$

Demostración: Para la primera deducción, poner en la adjunción que define la conjunción $C = A$ y $B = \mathbf{V}$. La segunda deducción es consecuencia directa de la regla de inferencia $A \wedge B \vdash A$.

Si dos proposiciones A y B verifican $A \vdash B$ y $B \vdash A$, es decir que de A se deduce B y que de B se deduce A , entonces decimos que las proposiciones A y B son *equivalentes* y expresamos esto simbólicamente por $A \equiv B$. El ejercicio anterior nos dice, pues, que toda proposición A es equivalente a $A \wedge \mathbf{V}$. La misma conclusión se obtiene a partir del siguiente ejercicio:

Proposición 3.2

Si $A \vdash B$ entonces $A \wedge B \equiv A$.

Demostración: Sólo hay que demostrar que si $A \vdash B$ entonces $A \vdash A \wedge B$, pues $A \wedge B \vdash A$ es siempre cierto. Poniendo $C = A$ en la adjunción que sirve para definir la conjunción se obtiene el resultado buscado.

En particular, para toda proposición A se cumple $A \equiv A \wedge A$.

Decir que una proposición dada es verdadera significa que se deduce de la proposición básica $\mathbf{V}$, es decir, que $\mathbf{V} \vdash A$. Como siempre se cumple $A \vdash \mathbf{V}$, las proposiciones verdaderas son aquellas que son equivalentes a $\mathbf{V}$.

Proposición 3.3

Si las proposiciones A y B son verdaderas entonces la proposición $A \wedge B$ también es verdadera, y recíprocamente.

Demostración: Póngase $C = \mathbf{V}$ en la adjunción que sirve para definir la conjunción.

La relación entre la proposición $\mathbf{F}$ y la deducción es esencialmente opuesta a la que hay entre $\mathbf{V}$ y la deducción. “ $\mathbf{F}$ ” está caracterizada por la propiedad de que para toda proposición A se cumple

$$\mathbf{F} \vdash A,$$

es decir, la falsedad es el objeto inicial de la categoría de las proposiciones. Decir que la proposición A es falsa significa que $A \equiv \mathbf{F}$, que es lo mismo que decir que $A \vdash \mathbf{F}$. Por ejemplo, en cualquier anillo no degenerado se cumple $0 = 1 \vdash \mathbf{F}$.

Nótese que en principio nada excluye la posibilidad de que en un sistema dado haya muchas proposiciones A para las que no se cumpla ni $A \equiv \mathbf{V}$ ni $A \equiv \mathbf{F}$, es decir proposiciones que no son ni verdaderas ni falsas.

4 Disyunción, $\vee$

La propiedad universal que define la disyunción de proposiciones $A \vee B$ (léase A ó B) es la opuesta de la que define la conjunción, es decir, en términos de adjunción:

$$\frac{A \vee B \vdash C}{A \vdash C, B \vdash C}.$$

O equivalentemente,

- $A \vee B$ se deduce de A y se deduce de B .
- Si C es otra proposición que también se deduce de A y también de B entonces C se deduce de la proposición $A \vee B$.

Nótese que la coma en el “denominador” de la definición de disyunción es una *conjunción* en el metalenguaje, (igual que en la definición de conjunción).

Proposición 4.1

La definición de la disyunción es equivalente a las siguientes cuatro reglas de inferencia de la disyunción:

$$\boxed{A \vdash A \vee B}, \quad \boxed{B \vdash A \vee B}, \quad \boxed{A \vee A \vdash A}, \quad \text{y}$$

$$\boxed{\text{Si } A \vdash C \text{ y } B \vdash D \text{ entonces } A \vee B \vdash C \vee D}.$$

Demostración: Las dos primeras se obtienen al poner en la definición $C = A \vee B$; la tercera al poner $B = C = A$. Para deducir la cuarta se componen por transitividad las deducciones $A \vdash C \vdash C \vee D$ y $B \vdash D \vdash C \vee D$ y se aplica la definición al par resultante $A \vdash C \vee D, B \vdash C \vee D$. Recíprocamente, tomemos como válidas las cuatro reglas. Tomando $D = C$ en la última y componiendo por transitividad el resultado $A \vee B \vdash C \vee C$ con la tercera regla, $C \vee C \vdash C$, se llega a la implicación “de abajo hacia arriba”, es decir, “si $A \vdash C$ y $B \vdash C$ entonces $A \vee B \vdash C$ ”. Para la otra dirección se combinan por transitividad la hipótesis $A \vee B \vdash C$ con las dos primeras reglas de inferencia: $A \vdash A \vee B \vdash C, B \vdash A \vee B \vdash C$. Las dos deducciones resultantes son las buscadas.

Además, dualmente a lo que ocurría con la $\mathbf{V}$, $\mathbf{F}$ es una proposición neutra para la disyunción:

Proposición 4.2

Para toda proposición A se cumple

$$\mathbf{F} \vee A \equiv A.$$

Demostración: Para la primera deducción, poner en la adjunción que define la disyunción $C = A$ y $B = \mathbf{F}$. La segunda deducción es consecuencia directa de la regla de inferencia $A \vdash A \vee B$ (con $B = \mathbf{F}$).

Proposición 4.3

Si $A \vdash B$ entonces $A \vee B \equiv B$. De esto se deduce que para toda proposición A el operador δ_A definido por $\delta_A(B) = A \vee B$ es idempotente en el sentido de que $\delta_A^2 \equiv \delta_A$.

Demostración: Como $B \vdash A \vee B$ se cumple siempre, sólo hay que probar $A \vee B \vdash B$. Esto se deduce aplicando la funtorialidad de la disyunción al par de deducciones $A \vdash B, B \vdash B$, y después usar la transitividad de la deducción en $A \vee B \vdash B \vee B \vdash B$. Para demostrar que δ_A es idempotente hay que demostrar que para cualesquiera proposiciones A y B se verifica $A \vee (A \vee B) \equiv A \vee B$. Pero esto es un caso particular del resultado anterior porque $A \vdash A \vee B$ se da siempre.

5 Implicación, $\Rightarrow$

La operación de implicación, $\Rightarrow$, aplicada a un par de proposiciones A, B nos da otra proposición $A \Rightarrow B$ que se lee normalmente “ A implica B ”

o “si A entonces B ”. Esta expresión $A \Rightarrow B$ no debe confundirse con la expresión $A \vdash B$ que *no* representa una proposición como A , B , y $A \Rightarrow B$, sino que representa una afirmación acerca de proposiciones y que se escribe solamente cuando se quiere decir que B realmente se deduce de A , mientras que $A \Rightarrow B$ es una proposición que, como otras proposiciones puede ser importante considerarla incluso cuando no es ni “verdadera” ni “falsa”.

La propiedad universal que define la implicación es la conocida regla de *modus ponens* junto con el llamado *teorema de deducción* que se expresa no sólo en términos de $\vdash$, sino también en términos de $\wedge$:

$$\frac{A \wedge B \vdash C}{A \vdash (B \Rightarrow C)} . \quad (2)$$

Esto significa que la proposición $B \Rightarrow C$ se deduce de una proposición A si y sólo si C se deduce de la conjunción de A y B . En particular, tomando $A = \mathbf{V}$, y puesto que $(\mathbf{V} \wedge B) \equiv B$, concluimos que

$$\frac{B \vdash C}{\mathbf{V} \vdash B \Rightarrow C} ,$$

es decir, la proposición $B \Rightarrow C$ es verdadera si y solo si de B se deduce C .

Esto justifica el frecuente abuso de notación consistente en escribir el símbolo de implicación, $\Rightarrow$, en lugar del de deducción, $\vdash$, es decir, cuando se quiere decir que de una proposición se deduce otra. El abuso consiste, pues, en escribir simplemente $A \Rightarrow B$ cuando se quiere decir que la proposición $A \Rightarrow B$ es verdadera. Este abuso no suele causar confusión, pero hay que tener presente que la proposición $A \Rightarrow B$ se puede formar siempre para dos proposiciones *cualesquiera* A , B y que no es, en general, ni verdadera ni falsa. Y desde luego el hecho de que $A \Rightarrow B$ no sea verdadera no significa que sea falsa, aún cuando en ese caso es falso que $A \vdash B$.

Por otro lado, el hecho de que $A \Rightarrow B$ sea verdadera precisamente cuando de A se deduce B nos indica la estrategia básica utilizada para demostrar la verdad de una proposición de la forma $A \Rightarrow B$, a saber: suponer temporalmente que A sea cierto y tratar de probar B a partir de eso. Una estrategia alternativa, conocida como “reducción al absurdo” es posible cuando B es (equivalente a) una proposición de la forma $C \Rightarrow \mathbf{F}$ (Ejercicios 8.2 y 9.1). Hablaremos más de esto en la sección 8 sobre la negación.

6 Otras propiedades del operador implicación

De la propiedad universal que define al operador implicación se deducen inmediatamente las siguientes reglas de inferencia:

Proposición 6.1

Demostrar que para cualesquiera proposiciones $A, B, C, \dots$ se verifica:

$$\boxed{A \wedge (A \Rightarrow B) \vdash B}, \quad \boxed{A \vdash B \Rightarrow (A \wedge B)},$$

$$\boxed{\text{Si } C \vdash A \text{ y } B \vdash D \text{ entonces } (A \Rightarrow B) \vdash (C \Rightarrow D)}.$$

Y recíprocamente, demostrar que de esas tres reglas de inferencia se deduce la propiedad definidora del operador implicación.

Demostración: La primera regla se obtiene al aplicar la definición al “denominador” $(A \Rightarrow B) \vdash (A \Rightarrow B)$, la segunda al aplicar la definición al “numerador” $A \wedge B \vdash A \wedge B$, mientras que para obtener la tercera podemos usar la funtorialidad de la conjunción aplicada a $C \vdash A$ para obtener $(A \Rightarrow B) \wedge C \vdash (A \Rightarrow B) \wedge A$. Usando ahora la primera regla y la segunda hipótesis obtenemos $(A \Rightarrow B) \wedge C \vdash (A \Rightarrow B) \wedge A \vdash B \vdash D$, de donde, por transitividad, $(A \Rightarrow B) \wedge C \vdash (A \Rightarrow B) \wedge A \vdash D$. Usando esta deducción como numerador de la definición de implicación, se deduce el resultado deseado o *funtorialidad de la implicación*. Recíprocamente,

Ejercicio 6.1

Demostrar que para cualquier proposición A se verifican las siguientes equivalencias:

$$A \Rightarrow A \equiv \mathbf{V}, \quad (3)$$

$$\mathbf{V} \Rightarrow A \equiv A, \quad (4)$$

$$\mathbf{F} \Rightarrow A \equiv \mathbf{V}, \quad (5)$$

$$A \Rightarrow \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}. \quad (6)$$

Ejercicio 6.2

Demostrar que para cualesquiera proposiciones A, B, C se verifica

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash A \Rightarrow C, \quad (7)$$

$$B \Rightarrow C \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C), \quad (8)$$

$$A \Rightarrow B \vdash (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C). \quad (9)$$

Mostrar además que (8) y (9) se reflejan en el metalenguaje:

$$\text{Si } B \vdash C \text{ entonces } A \Rightarrow B \vdash A \Rightarrow C, \quad (10)$$

$$\text{Si } A \vdash B \text{ entonces } B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C. \quad (11)$$

Nótese la sutil diferencia entre (8) (“de cualquier proposición de la forma $B \Rightarrow C$ se deduce una proposición de la forma $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ para cualquier A ”) y (10) (“si de B se deduce C entonces de cualquier proposición de la forma $A \Rightarrow B$ se deduce la proposición $A \Rightarrow C$ ”). Una observación análoga se aplica a (9) y (11).

Ejercicio 6.3

Mostrar que para cualesquiera proposiciones A, B, C se verifican las equivalencias

$$(A \wedge B) \Rightarrow C \equiv A \Rightarrow (B \Rightarrow C), \quad (12)$$

$$A \Rightarrow (B \wedge C) \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C), \quad (13)$$

$$(A \vee B) \Rightarrow C \equiv (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C). \quad (14)$$

Proposición 6.2

Utilizar de los resultados anteriores los que convenga para demostrar que para toda proposición A el operador h_A definido por $h_A(B) = A \Rightarrow B$ es una topología en el sentido de que verifica las propiedades:

1. Idempotente: $h_A^2 \equiv h_A$,
2. “Exacto por la izquierda”:

$$h_A(\mathbf{V}) = \mathbf{V} \quad \text{y} \quad h_A(B \wedge C) \equiv h_A(B) \wedge h_A(C).$$

Demostración: La idempotencia se deduce directamente de (12), mientras que la exactitud por la izquierda es exactamente (6) junto con (13).

7 La ley distributiva

Una de las consecuencias más importantes de la existencia del operador implicación es la “ley distributiva” de la conjunción respecto a la disyunción. Esta consecuencia es tanto más sorprendente cuanto que no incluye a la implicación aunque no se puede demostrar sin ella. Esta ley distributiva es la siguiente:

$$\boxed{A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}.$$

En la demostración de esta ley hay dos partes. Una de ellas, —el que de la proposición $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ se deduce $A \wedge (B \vee C)$ — es una simple consecuencia directa de las definiciones de la conjunción y disyunción:

Ejercicio 7.1

Combinar las deducciones $A \vdash A$ y $B \vdash B \vee C$ para demostrar que para cualesquiera proposiciones A, B, C se verifica

$$A \wedge B \vdash A \wedge (B \vee C).$$

Deducir de ello que $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$.

Sin embargo, la otra parte de la demostración, a saber, que de $A \wedge (B \vee C)$ se deduce $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, depende crucialmente de la existencia de la implicación y es como sigue: Comenzamos con las deducciones

$$(A \wedge B) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad \text{y} \quad (A \wedge C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

de las que por la definición de la implicación se llega respectivamente a

$$B \vdash A \Rightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)] \quad \text{y} \quad C \vdash A \Rightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)].$$

Por la definición de disyunción esto es equivalente a

$$B \vee C \vdash A \Rightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)]$$

y aplicando una vez más la definición de implicación llegamos a lo que pretendíamos,

$$A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

8 Negación, $\neg$

Quizás el lector haya notado en el Ejercicio 6.1 la ausencia de equivalencias sencillas para proposiciones de la forma $A \Rightarrow \mathbf{F}$. Esa ausencia es debida a que esta proposición, denotada mediante la abreviación $\neg A$ (léase “no A ”),

$$\neg A = A \Rightarrow \mathbf{F},$$

define otro operador lógico importante que tiene la propiedad de que:

Proposición 8.1

$\neg A$ es verdad si y sólo si A es falso.

Demostración: Esto es la definición de implicación:

$$\frac{A(\equiv \mathbf{V} \wedge A) \vdash \mathbf{F}}{\mathbf{V} \vdash A \Rightarrow \mathbf{F}}.$$

Evidentemente, la definición de la negación implica la siguiente propiedad universal de la proposición $\neg B$:

$$\frac{A \wedge B \vdash \mathbf{F}}{A \vdash \neg B},$$

es decir, $\neg B$ se deduce de A si y sólo si “ A y B ” es falso. Esto se puede enunciar también así:

Proposición 8.2

Para cualesquiera proposiciones A, B se verifica:

$$(a) \quad A \wedge B \vdash \mathbf{F} \text{ si y sólo si } A \vdash \neg B, \quad (b) \quad \neg(A \wedge B) \equiv A \Rightarrow \neg B.$$

La segunda es conocida como Ley de DE MORGAN.

Demostración: (b) es un caso particular ($C = \mathbf{F}$) de (12) (ejercicio 6.3). De esto se deduce (a) porque si $A \wedge B \vdash \mathbf{F}$ entonces $\mathbf{V} \vdash A \wedge B \Rightarrow \mathbf{F}$ y por (b) $\mathbf{V} \vdash A \Rightarrow \neg B$. En consecuencia (a) y (b) son equivalentes.

Ejercicio 8.1

Demostrar que toda proposición verifica:

$$A \wedge \neg A \equiv \mathbf{F}$$

Deducir de ello y de la proposición 8.2 que para cualquier A , $A \vdash \neg \neg A$.

Otra forma de llegar a la misma conclusión es la siguiente:

Ejercicio 8.2 (Forma débil del Principio de Contradicción)

Demostrar directamente a partir de la definición de implicación que

$$(a) \quad B \vdash \neg A \text{ si y sólo si } A \vdash \neg B, \quad (b) \quad B \Rightarrow \neg A \equiv A \Rightarrow \neg B$$

y deducir de ello que para toda proposición A se cumple $A \vdash \neg \neg A$.

Sugerencia: Lo último se deduce de (a) poniendo $B = \neg A$.

Proposición 8.3

Demostrar que la negación invierte las deducciones, es decir, que

$$(a) \text{ Si } A \vdash B \text{ entonces } \neg B \vdash \neg A, \quad (b) \text{ } A \Rightarrow B \vdash \neg B \Rightarrow \neg A.$$

Deducir de ello y del resultado del ejercicio 8.2 que para toda proposición A se cumple

$$\neg\neg\neg A \equiv \neg A.$$

Demostración: (b) es consecuencia de (7) poniendo $C = \mathbf{F}$. (a) se deduce de (b) como en el ejercicio 8.2.

Proposición 8.4

Se verifican las siguientes equivalencias:

$$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B), \quad (15)$$

$$\neg(A \wedge B) \equiv A \Rightarrow \neg B \equiv B \Rightarrow \neg A, \quad (16)$$

$$\neg \mathbf{V} \equiv \mathbf{F}, \quad (17)$$

$$\neg \mathbf{F} \equiv \mathbf{V}. \quad (18)$$

Demostración: La equivalencia (15) es el caso particular de (14) en que $C = \mathbf{F}$. Con (16) ocurre lo mismo pero respecto de (12). Igualmente, (17) y (18) son sendos casos particulares de (4) y (5) con $A = \mathbf{F}$.

9 El Principio de Contradicción, la Ley del tercio Excluido y la Lógica Booleana

En el ejercicio 8.2 encontramos una forma débil del principio de contradicción o de “reducción al absurdo”, a saber:

$$\boxed{A \Rightarrow \neg B \equiv B \Rightarrow \neg A}.$$

Esta forma del principio de contradicción es, pues, válida en todo sistema lógico. Esta situación contrasta con la forma usual “fuerte” del principio de contradicción, que reza:

$$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$$

y que sólo es válido en aquellos casos en que B sea equivalente a una proposición de la forma $C \Rightarrow \mathbf{F}$

Ejercicio 9.1 (Principio de Contradicción)

Demostrar que si $B \equiv \neg C$ entonces

$$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A.$$

En un sistema en que toda proposición es de la forma $A \Rightarrow \mathbf{F}$ se cumple el *Axioma de Boole*, $A \equiv \neg\neg A$, que nos dice que el operador *doble negación* es equivalente a la identidad. En general, sin embargo, este operador tiene solamente las propiedades de una topología:

Ejercicio 9.2

Demostrar que el operador doble negación, $j = \neg\neg$, es una topología, es decir satisface las propiedades:

1. “Idempotente”: $j^2 \equiv j$,
2. “Exacto por la izquierda”:

$$j(\mathbf{V}) = \mathbf{V} \quad \text{y} \quad j(B \wedge C) \equiv j(B) \wedge j(C).$$

Lo que sí se puede demostrar sin hipótesis adicionales es la “mitad” del principio de contradicción o de reducción al absurdo. Es evidente que podríamos obtener el principio de contradicción si para toda proposición A fuese $A \equiv \neg\neg A$ (es decir, en vista de que ya sabemos que siempre se da $A \vdash \neg\neg A$, si se cumpliera siempre $\neg\neg A \vdash A$). Esto, que es realmente el contenido del Axioma de Boole no se deduce de las reglas de inferencia dadas hasta aquí, pero puede siempre suponerse válido sin incurrir en contradicción con las demás reglas. Por otro lado este axioma es equivalente a otro que se conoce como la *Ley del Tercio Excluido*, y que expresa que toda proposición del lenguaje o “es verdadera” o “es falsa”:

$$\boxed{A \vee \neg A \equiv \mathbf{V}}.$$

Ejercicio 9.3

Demostrar que la ley del tercio excluido, $A \vee \neg A \equiv \mathbf{V}$, es equivalente a la conjunción de las dos siguientes:

1. *Axioma de BOOLE*: $\neg\neg A \equiv A$, y
2. *Ley de DE MORGAN*: $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$.²

²Ver la proposición 8.2.

10 La lógica generalizada

Las definiciones y demostraciones dadas hasta aquí acerca de la deducción de proposiciones y su relación con los operadores lógicos de conjunción, disyunción, implicación y negación, así como con las proposiciones básicas $\mathbf{V}$ y $\mathbf{F}$ pueden resumirse de forma compacta en la siguiente afirmación:

La totalidad de proposiciones de un sistema matemático constituye una categoría cuyos morfismos son las deducciones. Esta categoría es una categoría cartesiana cerrada cuyo objeto terminal es la proposición $\mathbf{V}$, cuyo producto cartesiano es la conjunción y cuyas “potencias” son las implicaciones. Además esta categoría tiene objeto inicial (la proposición $\mathbf{F}$) y coproductos dados por la disyunción. Puede ser considerada como un conjunto preordenado al identificar las distintas deducciones que nos llevan de una proposición a otra.

Todos los resultados que han sido mencionados en los apartados anteriores son consecuencia de lo que se acaba de decir y de los resultados generales de la teoría de categorías. Además, estos resultados generales son una guía eficaz tanto para la demostración de las reglas de inferencia como para su sistematización y clasificación.

Según lo dicho todas las reglas lógicas de inferencia pueden ser interpretadas como propiedades en una categoría cartesiana cerrada cualquiera (que tenga los colímites apropiados). Por otra parte al menos parte de esas reglas pueden interpretarse como propiedades en una categoría cerrada no necesariamente cartesiana, lo que ha llevado a considerar la estructura de una categoría monoidal cerrada general y las propiedades que se deducen de dicha estructura como el marco esencial de la lógica, constituyendo lo que se llama la *Lógica Generalizada*.

11 Diferencia lógica

La diferencia lógica de dos proposiciones A y B , escrita $A \setminus B$ (léase “ A pero no B ”), se define por una regla de inferencia dual u opuesta a la que define la implicación, a saber:

$$\frac{A \setminus B \vdash C}{A \vdash B \vee C}.$$

De aquí se deducen reglas análogas a las satisfechas por la implicación. La primera de ellas, consecuencia de $B \vee \mathbf{F} \equiv B$, es que $A \setminus B \equiv \mathbf{F}$ si y sólo si

$A \vdash B$. Por otro lado, en aquellos sistemas en que se cumple la ley del tercio excluido se verifica que la diferencia lógica viene dada por:

$$A \setminus B \equiv A \wedge (\neg B).$$

Para demostrarlo hay que probar que si se cumple la ley del tercio excluido entonces $A \wedge (\neg B) \vdash C$ si y sólo si $A \vdash B \vee C$. Ahora bien, según la definición de implicación, $A \wedge (\neg B) \vdash C$ si y sólo si $A \vdash \neg B \Rightarrow C$. Por otro lado, si se cumple la ley del tercio excluido entonces se cumple el Axioma de BOOLE y como consecuencia, $B \vee C \equiv \neg \neg(B \vee C) \equiv \neg B \Rightarrow \neg \neg C \equiv \neg B \Rightarrow C$.

Ejercicio 11.1

Establecer las leyes satisfechas por el operador diferencia lógica dualizando las leyes satisfechas por la implicación enunciadas en los ejercicios 8 y 9.

Mediante el uso de la diferencia lógica se puede demostrar la distributividad de la disyunción respecto a la conjunción,

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C),$$

en forma enteramente análoga (aunque “opuesta” o “dual”) a como se demuestra la distributividad de la conjunción respecto a la disyunción.

12 Complementario

Igual que a partir de la implicación se definió el operador negación, a partir de la diferencia lógica se define una especie de negación que se llama *complementario* y que se escribe A' :

$$A' = \mathbf{V} \setminus A.$$

Este operador satisface propiedades análogas a las de la negación:

Ejercicio 12.1

Demostrar que para cualesquiera proposiciones A, B se verifica:

$$A \vee A' \equiv \mathbf{V} \quad \text{y} \quad \text{Si } A \vee B \equiv \mathbf{V} \text{ entonces } A' \vdash B.$$

Deducir de ello que para cualquier A , $(A')' \vdash A$.

Ejercicio 12.2

Demostrar las siguientes equivalencias:

$$(A \wedge B)' \equiv A' \vee B' \quad (19)$$

$$(A \vee B)' \equiv A' \setminus B \equiv B' \setminus A \quad (20)$$

$$\mathbf{F}' \equiv \mathbf{V} \quad (21)$$

$$\mathbf{V}' \equiv \mathbf{F} \quad (22)$$

Ejercicio 12.3

Demostrar que si es válida la ley $A \wedge A' \equiv \mathbf{F}$, entonces se pueden demostrar:

1. $(A')' \equiv A$, y
2. $(A \vee B)' \equiv A' \wedge B'$.

Según lo dicho en el apartado anterior, en aquellos sistemas en que se cumple la ley del tercio excluso, la diferencia lógica de proposiciones viene dada por $A \setminus B \equiv A \wedge \neg B$. De esto se deduce que en tales sistemas el complementario coincide con la negación: $A' = \mathbf{V} \setminus A \equiv \mathbf{V} \wedge \neg A \equiv \neg A$. Por otro lado, en sistemas en que no se cumple la ley del tercio excluso puede ni siquiera existir el operador diferencia lógica aunque siempre se puede construir la proposición $A \wedge \neg B$. El concepto de “complementario” deducido de esta especie de diferencia siempre coincidirá con la negación.

13 Frontera

En varios sistemas de interés falla la hipótesis $A \wedge A' \equiv \mathbf{F}$. En tales sistemas existe, pues, un nuevo operador llamado *frontera*, que se escribe ∂A y se define como:

$$\partial A = A \wedge A'.$$

Ejercicio 13.1

Demostrar que el operador frontera satisface las propiedades:

$$\boxed{A \wedge \partial A \equiv \partial A}, \quad \boxed{A \vee \partial A \equiv A}, \quad \boxed{\partial A \vdash A'}.$$

La propiedad fundamental del operador frontera es la *Regla de LEIBNITZ*:

$$\boxed{\boxed{\partial(A \wedge B) \equiv ((\partial A) \wedge B) \vee (A \wedge \partial B)}}.$$

Ésta se demuestra usando la regla de inferencia de la diferencia lógica de la siguiente manera:

$$(\partial A \wedge B) \vee (A \wedge \partial B) \equiv (\partial A \vee A) \wedge (B \vee A) \wedge (\partial A \vee \partial B) \wedge (B \vee \partial B) \quad (23)$$

$$\equiv A \wedge (B \vee A) \wedge (\partial A \vee \partial B) \wedge B \quad (24)$$

$$\equiv (A \wedge B) \wedge (B \vee A) \wedge ((A \wedge A') \vee (B \wedge B')) \quad (25)$$

$$\equiv (A \wedge B) \wedge ((A \vee B) \wedge (A' \vee B) \wedge (A \vee B') \wedge (A' \vee B')) \quad (26)$$

$$\equiv (A \wedge B) \wedge (A' \vee B) \wedge (A \vee B') \wedge (A \wedge B)' \quad (27)$$

Pero puesto que $A \wedge B \vdash A' \vee B$ y $A \wedge B \vdash A \vee B'$, tenemos

$$A \wedge B \wedge (A' \vee B) \equiv A \wedge B \quad \text{y} \quad A \wedge B \wedge (A \vee B') \equiv A \wedge B$$

y en consecuencia

$$(\partial A \wedge B) \vee (A \wedge \partial B) \equiv (A \wedge B) \wedge (A \wedge B)' \equiv \partial(A \wedge B).$$

Nótese que en la demostración no se ha usado la distributividad de la conjunción respecto a la disyunción.

Ejercicio 13.2

Demostrar que si es válida la ley $(A')' \equiv A$ (por ejemplo, si se cumple $A \wedge A' \equiv \mathbf{F}$), entonces:

$$\partial(\partial A) \equiv \partial A.$$

14 Cuantificadores

Para especificar el uso y significado del cuantificador existencial, $\exists$, y del cuantificador universal, $\forall$, es necesario especificar primero los tipos de proposiciones que se están considerando. Sean $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ dos universos de cosas (puntos, espacios, cantidades,...) de las que se puede hablar y sea $\mathbf{X} \xrightarrow{f} \mathbf{Y}$ una aplicación entre ellos. Supongamos que tenemos un sistema de proposiciones acerca de $\mathbf{X}$ y otro acerca de $\mathbf{Y}$, ambos admitiendo todas o parte de las operaciones lógicas discutidas previamente.

Si A es una proposición que se puede particularizar a los elementos de $\mathbf{X}$ y, para $x \in \mathbf{X}$, $A(x)$ significa la proposición A predicada del elemento x , entonces indicaremos por $A(x) \vdash_x B(x)$ o $A \vdash_{\mathbf{X}} B$, indistintamente, el hecho de que todo x en $\mathbf{X}$ que satisface A también satisface B .

La aplicación f dada hace corresponder a cada proposición B sobre las cosas en $\mathbf{Y}$ una proposición Bf (sobre las cosas en $\mathbf{X}$) definida por

$$(Bf)(x) = B(f(x)).$$

Este proceso se llama *sustitución* o *imagen inversa* mediante f . Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $B(y) \equiv (y - 1 = 10)$ entonces $(Bf)(x) \equiv (x^2 - 1 = 10)$. Así, la sustitución de f en proposiciones es un proceso que va “hacia atrás” en relación a f ya que f lleva los elementos de $\mathbf{X}$ a elementos de $\mathbf{Y}$ mientras que la “sustitución mediante f ” lleva las proposiciones acerca de $\mathbf{Y}$ en proposiciones acerca de $\mathbf{X}$. Además es evidente que la sustitución “conserva las deducciones”, es decir, lleva proposiciones relacionadas por $\vdash_{\mathbf{Y}}$ a proposiciones relacionadas por $\vdash_{\mathbf{X}}$,

$$\text{si } A \vdash_{\mathbf{Y}} B \text{ entonces } Af \vdash_{\mathbf{X}} Bf.$$

Por el contrario, ambos cuantificadores mediante f (el universal, $\forall_f$, y el existencial, $\exists_f$) son “covariantes”, es decir van en el mismo sentido que f : a las proposiciones acerca de $\mathbf{X}$ les asignan proposiciones acerca de $\mathbf{Y}$, pero su definición, propiedad característica o regla de inferencia básica es una propiedad universal en la que interviene de forma decisiva el proceso de sustitución mediante f .

14.1 El cuantificador existencial

Para cada proposición A acerca de $\mathbf{X}$, $\exists_f A$ es aquella proposición acerca de $\mathbf{Y}$ que tiene la propiedad universal de que su imagen inversa mediante f se deduce de A , es decir:

$$\frac{\exists_f A \vdash_{\mathbf{Y}} B}{A \vdash_{\mathbf{X}} Bf}. \quad (28)$$

o, usando la notación “con la variable”

$$(\exists_f A)(y) \vdash B(y) \quad \text{para cualquier } y \text{ en } \mathbf{Y}$$

si y sólo si

$$A(x) \vdash B(f(x)) \quad \text{para cualquier } x \text{ en } \mathbf{X}.$$

Esta es la regla de inferencia para llevar a cabo cálculos basados en el significado de $\exists_f A$, el cual es el siguiente:

$$\begin{aligned} (\exists_f A)(y) &\equiv \text{“entre los } x \text{ en } \mathbf{X} \text{ que satisfacen} \\ &\quad f(x) = y \text{ existe alguno que} \\ &\quad \text{cumple } A(x)\text{”} \end{aligned}$$

o, dicho de otro modo: $(\exists_f A)(y)$ significa “existe un elemento $x \in f^{-1}(y)$ que verifica $A(x)$ ”.

Para analizar en más detalle la definición (29) del cuantificador existencial supongamos que A y B son proposiciones (A sobre $\mathbf{X}$ y B sobre $\mathbf{Y}$) relacionadas por $A \vdash_{\mathbf{X}} Bf$, es decir, si se cumple $A(x)$ entonces se cumple $B(f(x))$. Entonces para concluir $B(y)$ es suficiente que exista un $x \in f^{-1}(y)$ tal que se cumpla $A(x)$. Recíprocamente, supongamos que A , y B son proposiciones relacionadas por $\exists_f A \vdash_{\mathbf{Y}} B$, es decir, para cada y tal que existe $x \in f^{-1}(y)$ verificando $A(x)$ se verifica $B(y)$. Entonces evidentemente para todo x que verifique $A(x)$ se ha de verificar $B(f(x))$.

Con frecuencia se llama a $\exists_f A$ la *imagen* de A mediante f .

Ejercicio 14.1

Demstrar las siguientes propiedades del cuantificador existencial para una aplicación $\mathbf{X} \xrightarrow{f} \mathbf{Y}$ dada:

1. Si $A_1 \vdash_{\mathbf{X}} A_2$ entonces $\exists_f A_1 \vdash_{\mathbf{Y}} \exists_f A_2$
2. $\exists_f \mathbf{F}_{\mathbf{X}} \equiv_{\mathbf{Y}} \mathbf{F}_{\mathbf{Y}}$
3. $\exists_f (A_1 \vee A_2) \equiv_{\mathbf{Y}} (\exists_f A_1) \vee (\exists_f A_2)$
4. $A \vdash_{\mathbf{X}} (\exists_f A)f$
5. $\exists_f (Bf) \vdash_{\mathbf{Y}} B$

14.2 El cuantificador universal

Al igual que el cuantificador existencial, el cuantificador universal mediante f , $\forall_f$, está caracterizado por su relación con la sustitución mediante f que consiste en la regla de inferencia

$$\frac{B \vdash_{\mathbf{Y}} \forall_f A}{Bf \vdash_{\mathbf{X}} A} . \quad (29)$$

o, usando la notación “con la variable”

$$B(y) \vdash (\forall_f A)(y) \quad \text{para cualquier } y \text{ en } \mathbf{Y}$$

si y sólo si

$$B(f(x)) \vdash A(x) \quad \text{para cualquier } x \text{ en } \mathbf{X}.$$

Esta es la regla de inferencia para llevar a cabo cálculos basados en el significado de $\forall_f A$, el cual es el siguiente:

$$(\forall_f A)(y) \equiv \text{“para todo } x \text{ en } \mathbf{X} \text{ que satisface } f(x) = y, \text{ se cumple } A(x)\text{”}$$

o, dicho de otro modo: $(\forall_f A)(y)$ significa “todo elemento $x \in f^{-1}(y)$ verifica $A(x)$ ”.

Ejercicio 14.2

Enunciar y demostrar las propiedades básicas del cuantificador universal $\forall_f$ (para una aplicación $\mathbf{X} \xrightarrow{f} \mathbf{Y}$ dada) que son duales de las enunciadas en el ejercicio 14.1 para $\exists_f$.

15 Aplicaciones de los cuantificadores

Vemos a continuación varios ejemplos básicos de cuantificadores mediante una función f obtenidos al particularizar f a ciertas funciones especiales.

15.1 Cuantificación total

Supongamos que $\mathbf{X}$ es arbitrario e $\mathbf{Y} = \mathbf{1}$ (es decir, que $\mathbf{Y}$ es un universo con una sola cosa). Entonces sólo existe una única aplicación de $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$,

$$\mathbf{X} \xrightarrow{f} \mathbf{1}.$$

En la categoría de conjuntos constantes abstractos el $\mathbf{1}$ sólo tiene dos subconjuntos de forma que, salvo equivalencia, sólo hay dos predicados³ en $\mathbf{1}$, “verdad” y “falso”. Sus imágenes inversas bajo la única f son $verdad_{\mathbf{X}}$ y $falso_{\mathbf{X}}$ pero en $\mathbf{X}$ hay muchos más predicados posibles $A(x)$ (excepto si $\mathbf{X}$ es el universo vacío en cuyo caso $verdad_{\mathbf{X}} = falso_{\mathbf{X}}$). Un predicado general A dependerá de x en el sentido de que para algún x_0 de $\mathbf{X}$ se cumplirá $A(x_0)$ y para algún otro x_1 puede que $A(x_1)$ no se cumpla. Sin embargo el predicado $\exists_f A$ ya no depende de nada; o bien es absolutamente verdad (en caso de que $A(x)$ se cumpla para al menos un x) o absolutamente falso (en caso de que $A(x)$ sea falso para todo x); en otras palabras

$$\begin{aligned} \exists_f A \equiv_{\mathbf{1}} verdad_{\mathbf{1}} & \quad \text{si } A \not\equiv falso_{\mathbf{X}} \\ \exists_f A \equiv_{\mathbf{1}} falso_{\mathbf{1}} & \quad \text{si } A \equiv falso_{\mathbf{X}} \end{aligned}$$

³Statements.

Análogamente,

$$\begin{aligned} \forall_f A \equiv_{\mathbf{1}} \text{verdad}_{\mathbf{1}} & \quad \text{si} \quad A \equiv \text{verdad}_{\mathbf{X}} \\ \forall_f A \equiv_{\mathbf{1}} \text{falso}_{\mathbf{1}} & \quad \text{si} \quad A \neq \text{verdad}_{\mathbf{X}} \end{aligned}$$

15.2 Relación binaria

Un ejemplo más general y más típico se obtiene suponiendo que $\mathbf{Y}$ es un conjunto (o “universo de cosas”) arbitrario pero que tenemos otro conjunto T y definimos $\mathbf{X}$ como el producto cartesiano $\mathbf{X} = T \times \mathbf{Y}$. Entonces podemos elegir como función f simplemente la *proyección* de $T \times \mathbf{Y}$ sobre $\mathbf{Y}$. Esto significa que, teniendo en cuenta que cada x de $\mathbf{X} = T \times \mathbf{Y}$ tiene una expresión única como $x = \langle t, y \rangle$ con $t \in T$ e $y \in \mathbf{Y}$, f está definida como $f(x) = f(\langle t, y \rangle) = f(t, y) = y$

$$\begin{aligned} \mathbf{X} & \xrightarrow{f} \mathbf{Y} \\ f(t, y) &= y \quad \text{para todo} \quad \langle t, y \rangle \in \mathbf{X} \end{aligned}$$

Si entonces consideramos cualquier predicado B sobre $\mathbf{Y}$, tendremos

$$(Bf)(t, y) \equiv B(y),$$

es decir, Bf es “el mismo” predicado B pero considerado como dependiendo (vacíamente) de t . Por otro lado, un predicado genérico A sobre $\mathbf{X}$ depende realmente de t y de y (por lo que se suele llamar a tal predicado una *relación* entre T e $\mathbf{Y}$), sin embargo la cuantificación existencial de A mediante la proyección f ya no depende de t .

$$\frac{(\exists_f A)(y) \vdash_{\mathbf{Y}} B(y)}{A(t, y) \vdash_{T \times \mathbf{Y}} B(y)}$$

Observación: Usualmente se usa para f una notación que enfatiza lo que se *olvida* (en el último ejemplo t) en lugar de lo que se retiene (el resto de x , en dicho ejemplo y). Dado un y , la existencia de un x en $\mathbf{X} = T \times \mathbf{Y}$ que cumpla $A(x)$ y cuya imagen por la proyección f es y es equivalente a la existencia de un t en T tal que se cumpla $A(t, y)$ ya que un x tal que $f(x) = y$ está determinado totalmente como $x = \langle t, y \rangle$ con t completamente determinado por x . Así, se explica la notación clásica

$$\exists t A \equiv \exists_f A$$

cuando f es la proyección de un producto cartesiano que deja fuera a t y A es un predicado sobre (los elementos de) dicho producto. Exhibiendo todas las variables la notación anterior se escribiría

$$\exists t A(t, y) \equiv_{\mathbf{Y}} (\exists_f A)(y) \quad (30)$$

donde $f(t, y) = y$. Obsérvese que el miembro de la izquierda depende de y pero no de t . El operador $\exists t$ “liga” a la variable t convirtiéndola en una *variable muda* igual que ocurre en una integral definida como $\int_0^1 f(t) dt$ que es un número y no una función de t .

Análogamente se tiene

$$\forall t A(t, y) \equiv_{\mathbf{Y}} (\forall_f A)(y)$$

donde de nuevo $f(t, y) = y$ y A es un predicado sobre todo (todos los elementos de) el producto cartesiano $\mathbf{X} = T \times \mathbf{Y}$ ya que, por la naturaleza de f , dado y , decir que todos los x que cumplen $f(x) = y$ tienen la propiedad A es, en este caso especial, lo mismo que decir que todo t , cuando se empareja con y , satisface la relación $A(t, y)$.

Es evidente que el ejemplo dado en 15.1 es un caso especial de este segundo ejemplo ya que si $\mathbf{Y} = \mathbf{1}$ entonces $\mathbf{X} = T \times \mathbf{Y} = T$. Existe otro importante caso especial de este segundo ejemplo que veremos a continuación.

15.3 Sustitución en relaciones binarias

Supongamos que $\mathbf{Y} = T^2 = T \times T$ de forma que $\mathbf{X} = T \times \mathbf{Y} = T \times T^2 = T^3$ y tomemos ahora la proyección f

$$f(t_1, t_2, t_3) = \langle t_1, t_2 \rangle.$$

Los predicados B sobre $\mathbf{Y}$ son relaciones binarias en T mientras que los predicados A sobre $\mathbf{X}$ son relaciones ternarias sobre T . Al cuantificar una relación ternaria (ya sea con $\forall$ o con $\exists$) se obtiene como resultado una relación binaria. Veamos cómo se usa esto para expresar propiedades de relaciones binarias particulares B en T (es decir, predicados en T^2).

Consideremos la relación particular denotada $\leq$:

$$t_1 \leq t_2 \equiv_{T \times T} B(t_1, t_2).$$

El uso de esta notación para B sugiere que podemos querer considerar si B es una relación transitiva, lo que se expresa normalmente como

$$t_1 \leq t_2 \wedge t_2 \leq t_3 \Rightarrow t_1 \leq t_3$$

pero que también podemos expresar como

$$t_1 \leq t_2 \wedge t_2 \leq t_3 \vdash_3 t_1 \leq t_3 \quad (31)$$

donde $\vdash_3$ debe ser la relación de deducción entre predicados de $\mathbf{X} = T^3$ ya que en el miembro de la izquierda aparecen tres variables. Pero entonces ¿Cuál es el significado de los dos miembros si lo único que tenemos de partida es la relación binaria B que es un predicado en $\mathbf{Y} = T^2$?

Claramente tres aplicaciones f distintas y tautológicas que están involucradas en la construcción, aunque no siempre se mencionen explícitamente

$$\mathbf{X} = T^3 \begin{array}{c} \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \\ \rightrightarrows \end{array} T^2 = \mathbf{Y} ,$$

a saber, las proyecciones

$$\begin{aligned} \pi_1(t_1, t_2, t_3) &= \langle t_2, t_3 \rangle \\ \pi_2(t_1, t_2, t_3) &= \langle t_1, t_3 \rangle \\ \pi_3(t_1, t_2, t_3) &= \langle t_1, t_2 \rangle \end{aligned}$$

donde se ha seguido la costumbre de usar como subíndice de cada proyección el que indica la variable omitida. Entonces si B denota la relación binaria $\leq$ en T entonces los dos predicados $t_1 \leq t_2$ y $t_2 \leq t_3$ pueden ser considerados como predicados sobre $\mathbf{X} = T^3$

$$\begin{aligned} (B\pi_3)(t_1, t_2, t_3) &\equiv t_1 \leq t_2 \\ (B\pi_1)(t_1, t_2, t_3) &\equiv t_2 \leq t_3 \end{aligned}$$

de forma que se puede aplicar el operador de conjunción $\wedge$ de $\mathbf{X}$ para formar

$$(B\pi_3 \wedge B\pi_1)(t_1, t_2, t_3) \equiv t_1 \leq t_2 \wedge t_2 \leq t_3$$

y podemos compara el resultado con $B\pi_2$

$$\boxed{B\pi_3 \wedge B\pi_1 \vdash_3 B\pi_2}$$

que es precisamente la relación de deducción (31) que expresa la transitividad de la relación B de T^2 . Ahora bien, observando que $B\pi_2$ es realmente

independiente de la variable intermedia t_2 , podemos (por la regla de inferencia del cuantificador existencial $\exists$) cuantificar existencialmente para obtener una deducción en T^2

$$\boxed{\exists \pi_2 (B\pi_3 \wedge B\pi_1) \vdash_2 B}$$

que *igualmente* expresa la transitividad de B . O, exhibiendo las variables,

$$\exists r [(t \leq r) \wedge (r \leq s)] \vdash_2 t \leq s$$

esto es, demostrar $t \leq s$ mediante el uso de la transitividad es independiente de cualquier r específico entre t y s ; es suficiente saber que “existe uno”.

15.4

Las dos formas de la condición de transitividad de B se usan en los razonamientos diarios. Es esencial (incluso en lógica pura) saber que son equivalentes. Sin embargo se podría decir crudamente (y lo mismo podría decirse de cada uno de los operadores lógicos) que aunque la regla de inferencia que define al operador dice que “no se necesita” el operador cuando aparece en un lado del símbolo de deducción $\vdash$, una vez que el operador está determinado puede aparecer también en el otro lado de $\vdash$ y entonces, en ese otro lado, es normalmente esencial y no puede eliminarse.

Por ejemplo, podríamos expresar la relación $C \vdash D_1 \wedge D_2$ sin el operador $\wedge$ simplemente dando las dos condiciones $C \vdash D_1, C \vdash D_2$. Pero $A \wedge B \vdash C$ expresa en general que A y B deben ser supuestos a la vez para poder deducir C . Por supuesto en esta última situación podemos eliminar la conjunción $\wedge$ a cambio de usar la implicación $\Rightarrow$ en la forma $A \vdash (B \Rightarrow C)$, pero en general podemos ir más allá: Habiendo introducido el operador de implicación $\Rightarrow$ tenemos que admitir la posibilidad de formar condiciones tales como $(B \Rightarrow C) \vdash D$, pero en genral no hay forma de eliminar este $\Rightarrow$. De forma similar la condición $C_1 \vee C_2 \vdash D$ es equivalente al par $C_1 \vdash D, C_2 \vdash D$, pero una condición como $C \vdash D_1 \vee D_2$ no puede expresarse en general en términos de operadores más simples.

Otro ejemplo lo tenemos con la condición de que una relación binaria transitiva $\leq$ sea un orden *lineal*:

$$verdad_{T^2} \vdash_{T^2} [(t_1 \leq t_2) \vee (t_2 \leq t_1)]$$

que con la notación usada más arriba es simplemente

$$\boxed{verdad \vdash_2 B \vee B\sigma}$$

(con σ definida por $\sigma(t_1, t_2) = \langle t_2, t_1 \rangle$). Esta condición no se puede expresar en términos de ecuaciones o de operaciones lógicas más simples tales como la conjunción, $\wedge$, sino que requiere la disyunción $\vee$.

15.5 Densidad

Una observación similar pero concerniente al operador de cuantificación existencial, $\exists$, es la definición de que una relación binaria transitiva sea “densa”. Consideremos una relación binaria transitiva D dada por

$$t < s \equiv D(t, s)$$

se dice que D es *densa* si (usando variables)

$$t < s \vdash \exists r [(t < r) \wedge (r < s)]$$

o, sin usar variables:

$$D \vdash_2 \exists \pi_2 [D\pi_3 \wedge D\pi_1].$$

Por ejemplo, esta propiedad, con la interpretación usual de D (de “menor que”) se cumple en el universo de los números racionales y en el de los reales, pero no en el de los números enteros. Mientras sólo consideremos la “estructura” T , D en sí misma, es decir, mientras sólo consideremos predicados en T^n que se pueden construir con D , no hay manera de eliminar el $\exists$ porque aparece en el miembro de la derecha. Sin embargo, los ejemplos de los números racionales y reales nos muestran que si disponemos de más estructura en T es posible eliminar el cuantificador existencial usando una relación del tipo

$$F(r, s, t) \equiv r = \frac{t+s}{2}$$

la cual nos permite demostrar que si $t < s$ entonces

$$t < \frac{t+s}{2} \wedge \frac{t+s}{2} < s$$

de lo cual se deduce el $\exists r \dots$ porque ya tenemos algo más explícito (el $\frac{t+s}{2}$).

15.6 La relación binaria de igualdad

Otro ejemplo importante se obtiene al considerar el caso en que $\mathbf{X} \xrightarrow{f} \mathbf{Y}$ es la aplicación “diagonal”

$$\mathbf{X} \xrightarrow{\Delta} \mathbf{X} \times \mathbf{X}$$

definida por

$$\Delta(x) = \langle x, x \rangle.$$

Entonces para cada relación binaria B en $\mathbf{X}$ (predicado en $\mathbf{X}^2$) la expresión

$$(B\Delta)(x) \equiv B(x, x)$$

define una relación unaria (predicado en $\mathbf{X}$). De interés especial es la *relación de igualdad*

$$E \equiv \exists_{\Delta}(\text{verdad}_{\mathbf{X}})$$

que es la relación binaria en $\mathbf{X}$ obtenida al cuantificar existencialmente la relación unaria trivial “verdad” mediante la aplicación diagonal. Por la regla de inferencia para el cuantificador existencial $\exists$, para cualquier relación binaria B esta relación E verifica

$$\frac{E \vdash_2 B}{\text{verdad}_{\mathbf{X}} \vdash_1 B\Delta}, \quad (32)$$

o, en términos de variables diremos que se cumple

$$E(x_1, x_2) \vdash B(x_1, x_2)$$

si y sólo si B es una relación binaria cuya diagonalización es siempre verdad:

$$\text{verdad}_{\mathbf{X}} \vdash B(x, x).$$

Existe una clase de relaciones binarias B que tienen esta propiedad. Si A es un predicado cualquiera sobre $\mathbf{X}$ (relación unaria) y consideremos la relación B definida por

$$B(x_1, x_2) \equiv (A(x_1) \Rightarrow A(x_2)),$$

esto es: $B \equiv (Ap_1 \Rightarrow Ap_2)$ donde para $i = 1, 2$ $p_i(x_1, x_2) = x_i$. Entonces

$$(B\Delta)(x) \equiv (A(x) \Rightarrow A(x))$$

y por tanto $(B\Delta)(x)$ es verdad para todo x porque en el miembro de la derecha tenemos la expresión de que algo se implica a sí mismo la cual es siempre verdad. Por tanto, de (32) se deduce que

$$E \vdash B,$$

esto es, para cualquier A se cumple:

$$\boxed{E(x_1, x_2) \vdash (A(x_1) \Rightarrow A(x_2))} \quad (33)$$

con lo cual queda demostrada la regla de inferencia usual para la relación de *igualdad* E y podemos dar la siguiente definición de la igualdad “=” en **X**

$$x_1 = x_2 \equiv E(x_1, x_2)$$

La regla (33) se llama normalmente la regla de *sustitución* para la igualdad.

Usando la relación de igualdad E se puede hacer explícita la distinción entre nuestras B y D de la siguiente forma:

$$E \vdash_2 B$$

$$E \wedge D \vdash_2 falso_{T^2}$$

lo cual expresa que B es reflexiva mientras que D es *irreflexiva* (que es más fuerte que meramente no ser reflexiva).

Aunque la irreflexividad queda así expresada mediante la conjunción, $\wedge$, y *falso*, si se quiere se puede introducir el operador de implicación, $\Rightarrow$ (que es de alguna forma “más complicado”) el cual, por su propia regla de inferencia (2) (página 8) nos da:

$$D \vdash (E \Rightarrow falso)$$

y recordando la definición del operador de negación vemos que (cuando es posible usar la implicación) la irreflexividad de D es equivalente a

$$D \vdash \neg E$$

o, con variables,

$$t_1 < t_2 \vdash t_1 \neq t_2$$

o, si se prefiere (puesto que de todas formas ya habíamos usado la implicación),

$$verdad \vdash t_1 < t_2 \Rightarrow t_1 \neq t_2.$$

Finalmente, puesto que normalmente se sobreentiende el “*verdad* $\vdash$ ” cuando se afirma algo, se puede escribir simplemente

$$t_1 < t_2 \Rightarrow t_1 \neq t_2.$$

16 El cuantificador de existencia-y-unicidad

Una aplicación importantísima de la relación de igualdad E es la definición del cuantificador de *existencia y unicidad* que establece una conexión entre las relaciones generales expresadas como “predicados” como se hace más arriba y las “operaciones” bien definidas del álgebra y del análisis.

16.1 El operador de unicidad

Consideremos primero la unicidad (sin considerar de momento la existencia). Si A es un predicado cualquiera sobre T , queremos expresar la idea de que como mucho una cosa en T satisface A . Esto significará que siempre que t_1 y t_2 tengan la propiedad expresada por A entonces en realidad t_1 y t_2 denotan la misma cosa de T . En otras palabras

$$A(t_1) \wedge A(t_2) \vdash t_1 = t_2$$

donde la deducción $\vdash$ obviamente se supone que es la de $T \times T$. Es importante permitir otras variables por lo que generalizamos lo anterior a

$$A(t_1, y) \wedge A(t_2, y) \vdash_{T^2 \times \mathbf{Y}} t_1 = t_2$$

donde el miembro de la derecha debe significar $E\pi$ para la proyección $T^1 \times \mathbf{Y} \xrightarrow{\pi} \mathbf{Y}$ y el miembro de la izquierda es $A\pi_1 \wedge A\pi_2$ donde las proyecciones π_1 y π_2 ,

$$T^2 \times \mathbf{Y} \xrightarrow[\pi_2]{\pi_1} T \times \mathbf{Y},$$

son de nuevo obvias. Finalmente, es muy importante el poder considerar esta propiedad de unicidad de A independientemente de que se sepa si es verdad o no. Para ello usamos la implicación, $\Rightarrow$, en vez de la deducción, $\vdash$, un nuevo predicado de “unicidad de A en T ”

$$\text{Un}_T A \equiv \forall_\pi [A\pi_2 \wedge A\pi_1 \Rightarrow E\pi]$$

que es un predicado sobre $\mathbf{Y}$ siempre que A sea un predicado sobre $T \times \mathbf{Y}$. Exhibiendo las variables esto se expresa como

$$(\text{Un}_T A)(y) \equiv \forall t_1, t_2 [A(t_1, y) \wedge A(t_2, y) \Rightarrow t_1 = t_2].$$

Por ejemplo, $A(t, y)$ puede significar “ t es una solución de cierta ecuación diferencial con valor inicial y ”. Entonces demostrar $\text{Un}_T A$ para un y dado significa que cualesquiera dos soluciones de la ecuación que tengan valor inicial y son iguales (como funciones); esta es una cuestión distinta de la cuestión de si existe alguna solución con valor inicial y y ambas son independientes de si la existencia o la unicidad se cumplen para algún otro y .

Ejercicio 16.1

Sean $T = \mathbf{R} = \mathbf{Y}$ (es decir, ambos son el universo de los números reales). Considérese la relación

$$A(t, y) \equiv y = t(t - 1)$$

Demostrar que

$$\vdash (Un_TA)(y) \Leftrightarrow y \geq \frac{1}{4}$$

Por ejemplo

$$(Un_TA)(0) \vdash falso.$$

(Dibujar la gráfica)

16.2 El operador de “existencia-y-unicidad”

Ya hemos discutido el operador

$$(\exists_TA)(y) \equiv \exists t A(t, y)$$

(ecuación (30), página 23) así que podemos definir

$$\exists!_T A \equiv \exists_TA \wedge Un_TA$$

lo que nos da un predicado sobre $\mathbf{Y}$ para cada predicado A sobre $T \times \mathbf{Y}$.
Escrito con las variables,

$$\exists!_T A(t, y) \equiv \exists t [A(t, y)] \wedge \forall t_1, t_2 [A(t_1, y) \wedge A(t_2, y) \Rightarrow (t_1 = t_2)]$$

donde la expresión $\exists!_T A(t, y)$ se lee “existe un único t para el cual $A(t, y)$ ”.

Ejercicio 16.2

Con la notación del ejercicio 16.1 demostrar

$$\vdash (\exists_TA)(y) \Leftrightarrow y \leq \frac{1}{4}$$

y

$$\vdash (\exists!_T A)(y) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}.$$

(Usar la gráfica de la función definida en dicho ejercicio.)

Ejercicio 16.3

Si G es un predicado sobre $T \times \mathbf{Y}$ y H es un predicado sobre $\mathbf{X} \times T$ entonces su composición $G \circ H$ está definida como la relación sobre $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ dada por

$$G \circ H \equiv \exists t [H(x, t) \wedge G(t, y)].$$

Demostrar lo siguiente:

1. Esta relación compuesta $G \circ H$ es igual a $\exists_\pi[H\pi \wedge G\pi]$ donde cada una de las tres π son aplicaciones diferentes con dominio $\mathbf{X} \times T \times \mathbf{Y}$.
2. Una relación binaria sobre T es transitiva si y sólo si se deduce de su composición consigo misma.
3. Si G y H son las gráficas de aplicaciones $Y \rightarrow T$, $T \rightarrow X$, entonces su composición es la gráfica de la aplicación compuesta $Y \rightarrow X$.
4. La condición de que G sea la gráfica de una aplicación puede ser expresada sin usar los operadores $\forall, \Rightarrow$ pero usando $\exists, \wedge$; de hecho usando estos últimos en la simple combinación conocida como composición, a saber: considerando la relación G^* , traspuesta de G , y definida por

$$G^*(y, t) \equiv G(t, y) \quad (34)$$

y considerando las relaciones de igualdad E_T , $E_{\mathbf{Y}}$ respectivamente sobre T y sobre $\mathbf{Y}$, entonces G es la gráfica de una aplicación si y sólo si se cumplen las dos relaciones

$$\boxed{\begin{array}{l} E_{\mathbf{Y}} \vdash_{\mathbf{Y}^2} G^* \circ G \\ G \circ G^* \vdash_{T^2} E_T \end{array}} \quad (35)$$

5. Si dada la relación G existe alguna relación G^* tal que se cumplen las dos deducciones de (35) entonces G^* necesariamente es la traspuesta de G en el sentido de (34) y por tanto G es la gráfica de una aplicación.

La reformulación (35) de la condición de que G sea la gráfica de una aplicación es importante porque los operadores $\exists, \wedge$ (que aparecen en la definición de la composición, $\circ$) son estables bajo muchas más de las transformaciones geométricas usadas en análisis que lo son $\forall, \Rightarrow$ (que aparecen en la definición de la unicidad). Además la relación expresada en (35) entre “relaciones” y “aplicaciones” persistirá en situaciones en las que los valores de $G(t, y)$ son objetos matemáticos de una riqueza mucho mayor que las respuestas que se reducen simplemente a “sí” y “no”, por ejemplo espacios vectoriales.