

Adjuncionalidad en los fundamentos

F. W. Lawvere, NY 1968

Traducido* del inglés por Emilio Faro

Vigo, julio 2024

I. Esa búsqueda de conocimiento exacto que llamamos matemáticas parece involucrar de una forma esencial dos aspectos duales que podemos llamar lo Formal y lo Conceptual. Por ejemplo, manipulamos algebraicamente una ecuación polinómica y visualizamos geométricamente la correspondiente curva. O nos concentramos en un momento en la deducción de teoremas a partir de los axiomas de la teoría de grupos y en el momento siguiente consideramos la clase de aquellos grupos a los que realmente se refieren los teoremas. Así, lo Conceptual es en cierto sentido el asunto de lo Formal.

Por Fundamentos entendemos aquí el estudio de lo que es universal en las matemáticas. Por tanto los Fundamentos en este sentido no pueden ser identificados con ningún “punto de partida” o “justificación” de las matemáticas, aunque puede haber entre sus frutos algunos resultados parciales en esas direcciones. Pero entre los otros frutos de los Fundamentos tal como los hemos definido habrá presumiblemente guías para pasar de una rama de las matemáticas a otra y para calibrar hasta cierto punto qué direcciones de investigación pueden ser relevantes.

Al ser los Fundamentos una parte de las matemáticas, comparten con ellas la dualidad Formal-Conceptual. En su aspecto formal, el estudio de los Fundamentos siempre se ha concentrado en el lado formal de las matemáticas dando lugar a la Lógica. Más recientemente, la búsqueda de *universales* ha tomado también un giro conceptual en la forma de la Teoría de Categorías que comenzó al considerar como un nuevo objeto matemático la totalidad de todos los morfismos de los objetos matemáticos de una especie dada, A , y reconociendo que esos nuevos objetos matemáticos pertenecen todos a una especie común no trivial C que es independiente

Por ejemplo, $A =$
“grupo”.
 C es la especie
“categoría”.

*En esta traducción los textos que aparecen en color azul son aclaraciones introducidas

de *A*. Naturalmente, la tendencia formal en los Fundamentos también se puede aplicar al aspecto conceptual de las matemáticas, como, por ejemplo, cuando la *semántica* de una teoría formalizada *T* es considerada ella misma como otra teoría formalizada $\bar{T}$, o, de una forma algo diferente, en los intentos de formalizar el estudio de la categoría de categorías. Por otro lado, en los Fundamentos se puede conceptualizar el aspecto formal de las matemáticas, lo que nos lleva a las álgebras de Boole, a las álgebras cilíndricas y poliádicas y a ciertas estructuras que se discuten más abajo.

Este artículo tendrá como uno de sus objetivos el mostrar la universalidad del concepto de adjunción, que fue originalmente identificado y nombrado en la esfera conceptual de la teoría de categorías, pero que también parece permear la lógica. Específicamente, describimos en la sección III la noción de categoría cartesiana cerrada, que parece ser la estructura abstracta apropiada para hacer explícita la conocida analogía entre la teoría de la funtorialidad y la lógica proposicional, analogía que a veces se le saca partido en la teoría de la demostración. La estructura de una categoría cartesiana cerrada está dada enteramente por adjunciones, como también lo está la estructura de una “hiperdoctrina”, que al igual que ocurre con una categoría cartesiana cerrada incluye cuantificación. También en algunas áreas de las matemáticas consideradas normalmente como muy alejadas de la provincia de la lógica o de la teoría de la demostración aparecen “cuantificadores” exactamente análogos a los anteriores. Como se indica en este trabajo, también la recursión (definiciones recursivas) se caracteriza totalmente mediante un adjunto apropiado; así, es posible dar una teoría en la cual todos los axiomas importantes (lógicos o matemáticos) expresan casos especiales de la noción de adjuncionalidad —en líneas generales, la teoría de la demostración de la teoría de números intuicionista de orden superior.

Las mencionadas nociones de lo Conceptual, lo Formal y los Fundamentos no juegan ningún papel matemático en este artículo; solamente se han incluido en esta sección introductoria para proporcionar una posible perspectiva desde la cual se puede ver la relación de la teoría de categorías en general (y este trabajo en particular) con otros trabajos de tendencia universal. Sin embargo, si uno quisiese tomar en serio dichas nociones parecería deducirse que un rasgo de cualquier intento de formalizar los Fundamentos, sería una descripción de esta afirmada “dualidad” entre lo Formal y lo Conceptual. En verdad, tanto la teoría de categorías como la teoría de conjuntos consiguen —hasta cierto punto— proporcionar tal descripción en ciertos casos. Al final de la sección IV hay una observación concerniente a lo que se acaba de decir; aparte de eso dicha sección se dedica a una discusión de una clase de situaciones de adjunción que difieren de las de la sección III pero que igualmente parecen tener un significado

por el traductor, que no aparecen en el original. (*N. del T.*)

universal y que pueden ser descritas brevemente como una especie de conexión de Galois globalizada.

II. El propio formalismo de la teoría de categorías se presenta con frecuencia en términos “geométricos”. De hecho, dar una categoría es dar significado a la palabra *morfismo* y a la *conmutatividad* de diagramas como

$$A \xrightarrow{f} B, \quad A \xrightarrow{f} B \downarrow g \quad A \xrightarrow{f} B \downarrow b, \quad \text{etc.}$$

$$\quad \quad \quad \searrow h \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \searrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$\quad \quad \quad C \quad \quad \quad A' \xrightarrow{f'} B'$$

—en los cuales hay morfismos— de tal forma que las obvias condiciones de asociatividad e identidad se cumplan, así como la condición de que siempre que $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$ sean conmutativos exista un único h tal que

$$A \xrightarrow{f} B \downarrow g$$

$$\quad \quad \quad \searrow h \quad \quad \quad \downarrow$$

$$\quad \quad \quad C$$

sea conmutativo. Para ahorrar espacio también se dice que A es el dominio y que B es el codominio de f cuando $A \xrightarrow{f} B$ es conmutativo y en particular que h es la composición $g \cdot f$ si

$$A \xrightarrow{f} B \downarrow g$$

$$\quad \quad \quad \searrow h \quad \quad \quad \downarrow$$

$$\quad \quad \quad C$$

es conmutativo¹. Consideramos los *objetos* como coextensivos con morfismos identidad o equivalentemente con aquellos morfismos que aparecen como dominios y codominios. Como es costumbre, llamamos *isomorfismo* a todo morfismo que tiene un inverso por ambos lados.

Cualquier categoría $\mathbb{A}$ tiene asociada otra, $\mathbb{A}^{\text{op}}$, obtenida al mantener la interpretación de “morfismo” pero invirtiendo la dirección de todas las flechas cuando se reinterpreten los diagramas y su conmutatividad.

Así, $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathbb{A}^{\text{op}}$ significa $B \xrightarrow{f} A$ en $\mathbb{A}$ y $h = g \cdot f$ en $\mathbb{A}^{\text{op}}$ significa $h = f \cdot g$ en $\mathbb{A}$; claramente las interpretaciones de “dominio”, “codominio” y “composición” determinan la interpretación de “diagramas conmutativos”

¹En este artículo el autor utiliza la notación “diagramática”, ya en desuso, para la composición de morfismos escribiendo $r \cdot s$ para la composición de $X \xrightarrow{r} Y \xrightarrow{s} Z$. En toda esta traducción se ha usado la notación actual para las composiciones, que, por otra parte fue la notación usada por el autor desde finales de los años 70. (N. del T.)

generales. El teórico categórico le debe una disculpa al lector filosófico por este uso, desgraciadamente adoptado de forma general, de la palabra “conmutatividad” en un contexto más general que cualquiera que pudiera razonablemente tener una descripción en términos de “intercambiabilidad”.

Un *functor* F involucra a una categoría dominio $\mathbb{A}$ a una categoría codominio $\mathbb{B}$ y a una aplicación que asigna a cada morfismo x de $\mathbb{A}$, un morfismo Fx de $\mathbb{B}$ de tal forma que conserva la conmutatividad de diagramas. (Por tanto en particular un functor conserva objetos, dominios, codominios, composición e isomorfismos.) Usando la composición usual de aplicaciones para definir diagramas conmutativos de funtores se ve que los funtores son los morfismos de una super-categoría, normalmente llamada la (meta-) categoría de categorías.

Una categoría con exactamente un morfismo será designada por $\mathbb{1}$. Está determinada de forma única salvo isomorfismo por el hecho de que para cualquier categoría $\mathbb{A}$ existe exactamente un functor $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{1}$. Los funtores $\mathbb{1} \rightarrow \mathbb{A}$ se corresponden biyectivamente con los objetos en $\mathbb{A}$.

Una *transformación natural* φ involucra a una categoría dominio $\mathbb{A}$ a una categoría codominio $\mathbb{B}$, a funtores dominio y codominio

$$\mathbb{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F_0} \\ \xrightarrow{F_1} \end{array} \mathbb{B}$$

y a una aplicación que asigna a cada objeto A de $\mathbb{A}$ un morfismo en $\mathbb{B}$

$$F_0 A \xrightarrow{\varphi^A} F_1 A$$

de tal forma que para cada morfismo $A \xrightarrow{a} A'$ en $\mathbb{A}$ el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F_0 A & \xrightarrow{\varphi^A} & F_1 A \\ F_0 a \downarrow & & \downarrow F_1 a \\ F_0 A' & \xrightarrow{\varphi^{A'}} & F_1 A' \end{array}$$

es conmutativo en $\mathbb{B}$. Para $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ fijas, las transformaciones naturales entre funtores de $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ son los morfismos de una *categoría de funtores* $\mathbb{B}^{\mathbb{A}}$ donde escribimos

$$F_0 \xrightarrow{\varphi} F_1 \quad \text{en} \quad \mathbb{B}^{\mathbb{A}}$$

para la situación descrita más arriba y definimos la conmutatividad de triángulos

$$\begin{array}{ccc} F_0 & \xrightarrow{\varphi} & F_1 \\ & \searrow \bar{\varphi} \cdot \varphi & \downarrow \bar{\varphi} \\ & & F_2 \end{array} \quad \text{en} \quad \mathbb{B}^{\mathbb{A}}$$

por la condición

$$(\bar{\varphi} \cdot \varphi)A = (\bar{\varphi}A) \cdot (\varphi A) \quad \begin{array}{ccc} F_0 A & \xrightarrow{\varphi A} & F_1 A \\ & \searrow (\bar{\varphi} \cdot \varphi)A & \downarrow \bar{\varphi} A \\ & & F_2 A \end{array}$$

para todos los objetos A en $\mathbb{A}$.

También existe una segunda *multiplicación* (“de Godement”) de transformaciones naturales definida de tal forma que extiende en cierto sentido la composición de funtores. A saber: si

$$F_0 \xrightarrow{\varphi} F_1 \quad \text{en } \mathbb{B}^{\mathbb{A}} \quad \text{y} \quad G_0 \xrightarrow{\psi} G_1 \quad \text{en } \mathbb{C}^{\mathbb{B}}$$

entonces $G_0 F_0 \xrightarrow{\psi \varphi} G_1 F_1$ en $\mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ es la transformación natural que asigna a cada objeto A de $\mathbb{A}$ el morfismo de $\mathbb{C}$ que puede ser descrito indiferentemente por cualquiera de las dos composiciones en el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G_0 F_0 A & \xrightarrow{G_0(\varphi A)} & G_0 F_1 A \\ \psi(F_0 A) \downarrow & & \downarrow \psi(F_1 A) \\ G_1 F_0 A & \xrightarrow{G_1(\varphi A)} & G_1 F_1 A \end{array}$$

La multiplicación de Godement es funtorial

$$\mathbb{B}^{\mathbb{A}} \times \mathbb{C}^{\mathbb{B}} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$$

lo cual significa en particular que

$$(\bar{\psi} \cdot \psi)(\bar{\varphi} \cdot \varphi) = (\bar{\psi} \bar{\varphi}) \cdot (\psi \varphi)$$

y es asociativa, lo que significa que si además tenemos $H_0 \xrightarrow{\zeta} H_1$ en $\mathbb{D}^{\mathbb{C}}$ entonces

$$\zeta(\psi \varphi) = (\zeta \psi) \varphi \quad \text{en } \mathbb{D}^{\mathbb{A}}.$$

Otras reglas se deducen de los hechos de que en cualquier categoría producto $\mathbb{L} \times \mathbb{M}$ (cuya definición es obvia) se cumple una especie de relación de conmutatividad²

$$\langle L, m \rangle \cdot \langle l, M \rangle = \langle l, M' \rangle \cdot \langle L', m \rangle \quad \begin{array}{ccc} \langle L', M \rangle & \xrightarrow{\langle L', m \rangle} & \langle L', M' \rangle \\ \langle l, M \rangle \downarrow & & \downarrow \langle l, M' \rangle \\ \langle L, M \rangle & \xrightarrow{\langle L, m \rangle} & \langle L, M' \rangle \end{array}$$

²El autor utiliza la identificación entre objetos y morfismos identidad para denotar con un mismo símbolo un objeto y su morfismo identidad. (N. del T.)

para

$$L' \xrightarrow{l} L \quad \text{en } \mathbb{L} \quad \text{y} \quad M \xrightarrow{m} M' \quad \text{en } \mathbb{M},$$

y que si la multiplicación de Godement se aplica a transformaciones naturales identidad, se reduce a la composición de los correspondientes funtores.³

Dos casos intermedios serán importantes para lo que sigue: Si $F_0 = \varphi = F_1 = F$ entonces⁴

$$(\psi F)A = \psi(FA)$$

mientras que si $G_0 = \psi = G_1 = G$ entonces $(G\varphi)A = G(\varphi A)$. Por tanto cada funtor $\mathbb{A} \xrightarrow{F} \mathbb{B}$ induce via la multiplicación de Godement por F un funtor $\mathbb{C}^{\mathbb{B}} \xrightarrow{\mathbb{C}^F} \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ para cualquier categoría $\mathbb{C}$ y de forma similar todo $\mathbb{B} \xrightarrow{G} \mathbb{C}$ induce $\mathbb{B}^{\mathbb{A}} \xrightarrow{G^{\mathbb{A}}} \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ para cualquier categoría $\mathbb{A}$.

Llegamos ahora al concepto central, del que vamos a ver a continuación muchos ejemplos. Una *situación de adjunción* involucra a dos categorías $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, dos funtores

$$\mathbb{A} \xrightleftharpoons[U]{F} \mathbb{B}$$

y dos transformaciones naturales

$$\begin{array}{c|c} \mathbb{A} \xrightarrow{\eta} UF \quad \text{en } \mathbb{A}^{\mathbb{A}} & FU \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{B} \quad \text{en } \mathbb{B}^{\mathbb{B}} \\ \hline \begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \xrightarrow{\eta} & UF \\ \downarrow \eta & \searrow F & \downarrow U \\ \mathbb{A} & \xrightarrow{F} & \mathbb{B} \end{array} & \begin{array}{ccc} FU & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{B} \\ \downarrow \epsilon & \searrow F & \downarrow U \\ \mathbb{B} & \xrightarrow{F} & \mathbb{B} \end{array} \end{array}$$

que satisfacen dos ecuaciones (triángulos conmutativos)

$$\epsilon F \cdot F \eta = F \quad \text{en } \mathbb{B}^{\mathbb{A}}$$

o, para cada objeto A de $\mathbb{A}$,

$$FA \xrightarrow{F(\eta A)} FUFA \xrightarrow{\epsilon(FA)} FA.$$

$$U\epsilon \cdot \eta U = U \quad \text{en } \mathbb{A}^{\mathbb{B}}$$

o, para cada objeto B de $\mathbb{B}$,

$$UB \xrightarrow{\eta(UB)} UFUB \xrightarrow{U(\epsilon B)} UB.$$

³La mult. de Godement de $\mathbb{A} \xrightleftharpoons[F]{F} \mathbb{B} \xrightleftharpoons[G]{G} \mathbb{C}$ es $\mathbb{A} \xrightleftharpoons[GF]{GF} \mathbb{C}$ es decir $1_G 1_F = 1_{GF} = GF$, con lo que simplemente tenemos el funtor compuesto. (N. del T.)

⁴La mult. de Godement de $\mathbb{A} \xrightleftharpoons[F]{F} \mathbb{B} \xrightleftharpoons[G_1]{G_0} \mathbb{C}$ es $\mathbb{A} \xrightleftharpoons[G_1 F]{G_0 F} \mathbb{C}$ dado por $(\psi F)A = \psi(FA)$. (N. del T.)

Damos inmediatamente una forma equivalente de la definición. Denotemos⁵ $F/\mathbb{B}$ la categoría cuyos morfismos son los cuádruples de morfismos: uno, $A \xrightarrow{a} A'$ en $\mathbb{A}$ y tres, $B \xrightarrow{b} B'$, $FA \xrightarrow{h} B$, $FA' \xrightarrow{h'} B'$ en $\mathbb{B}$ para los que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{Fa} & FA' \\ h \downarrow & & \downarrow h' \\ B & \xrightarrow{b} & B' \end{array}$$

es conmutativo en $\mathbb{B}$; los diagramas conmutativos en $F/\mathbb{B}$ se definen de tal forma que olvidando el h y h' de arriba define un funtor

$$F/\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A} \times \mathbb{B}.$$

Los objetos de $F/\mathbb{B}$ corresponden, pues, a pares consistentes en un objeto A en $\mathbb{A}$ y un morfismo $FA \xrightarrow{h} B$ en $\mathbb{B}$. Análogamente se define una categoría⁶ $\mathbb{A}/U$ cuyos objetos corresponden a pares formados por un morfismo $A \xrightarrow{f} UB$ en $\mathbb{A}$ con un objeto B dado en $\mathbb{B}$ y que también tiene un funtor de olvido

$$\mathbb{A}/U \longrightarrow \mathbb{A} \times \mathbb{B}.$$

Se puede demostrar que dar η, ϵ que satisfagan las condiciones anteriores para completar una situación de adjunción es equivalente a dar un funtor

$$F/\mathbb{B} \xrightarrow{Q} \mathbb{A}/U$$

que conmuta⁷ con los funtores de olvido a $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$

$$\begin{array}{ccc} F/\mathbb{B} & \xrightarrow{Q} & \mathbb{A}/U \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathbb{A} \times \mathbb{B} & \end{array}$$

y que tiene un inverso (por ambos lados)

$$\mathbb{A}/U \xrightarrow{Q^{-1}} F/\mathbb{B}.$$

En particular, Q asigna a un objeto $FA \xrightarrow{h} B$ de $F/\mathbb{B}$ el objeto

$$A \xrightarrow{(Uh) \cdot (\eta A)} UB$$

⁵En el original aparece la notación antigua $(F, \mathbb{B})$ que fue el origen de la terminología “comma category” (“categoría coma”) que más tarde se tornó en “slice category” (“categoría cortada”). (N. del T.)

⁶En el original aparece la notación antigua $(\mathbb{A}, U)$. Véase la nota al pie número 17.

⁷Esta condición garantiza que (en lo que respecta a los objetos de $F/\mathbb{B}$ y $\mathbb{A}/U$) Q lleva morfismos $FA \rightarrow B$ de $\mathbb{B}$ a morfismos $A \rightarrow UB$ de $\mathbb{A}$. (N. del T.)

de $\mathbb{A}/U$ (⁸), mientras que Q^{-1} asigna a un objeto $A \xrightarrow{f} UB$ de $\mathbb{A}/U$ el objeto⁹

$$FA \xrightarrow{(\epsilon B) \cdot (Ff)} B$$

de $F/\mathbb{B}$. A veces se le llama a Q una adjuncionalidad¹⁰, a η una adjunción y a ϵ una coadjunción para F y U ; si tales existen, F se llama el *adjunto por la izquierda* de U y U el *adjunto por la derecha* de F y se escribe $F \dashv U$. En breve, F y U pueden colocarse en una situación de adjunción si y sólo si es posible dar biyecciones

$$(FA, B) \cong (A, UB) \quad \frac{FA \rightarrow B}{A \rightarrow UB}$$

de una forma que es “natural” o “funtorial” cuando A y B varían. Aquí, en el miembro de la izquierda se representa el conjunto de todos los morfismos $FA \xrightarrow{h} B$ en $\mathbb{B}$ (objetos de $F/\mathbb{B}$) y en el miembro de la derecha el conjunto de todos los morfismos $A \xrightarrow{f} UB$ en $\mathbb{A}$ (objetos de $\mathbb{A}/U$).

Las situaciones de adjunción tienen varias propiedades generales. Una de ellas es que los adjuntos son únicos (si existen), esto es, cualesquiera dos situaciones de adjunción con un $\mathbb{A} \xrightarrow{F} \mathbb{B}$ dado (como adjunto por la izquierda) son isomorfas de forma única y similarmente ocurre para un $\mathbb{B} \xrightarrow{U} \mathbb{A}$ dado (como adjunto por la derecha). Con mayor generalidad, dadas dos situaciones de adjunción para la $\mathbb{A}$ y la $\mathbb{B}$ fijas (denotando los adjuntos y adjunciones de una situación con apóstrofes y los correspondientes de la otra sin apóstrofes), entonces toda transformación natural $F' \rightarrow F$ induce una única $U \rightarrow U'$ y recíprocamente. Otra propiedad es que si $\mathbb{A} \xrightarrow{F} \mathbb{B}$, con $F \dashv U$, y $\mathbb{B} \xrightarrow{\tilde{F}} \mathbb{C}$, con $\tilde{F} \dashv \tilde{U}$, entonces $\tilde{F}F \dashv \tilde{U}U$ y también se cumple que para cualquier categoría $\mathbb{D}$, $F^{\mathbb{D}} \dashv U^{\mathbb{D}}$. Por tanto, una condición necesaria para que un funtor U tenga un adjunto por la izquierda es que U conmute (salvo isomorfismo de funtores) con todos los límites¹¹ que existan en $\mathbb{B}$ y

⁸En particular, si $B = FA$ y h es su morfismo identidad, se tiene $Q(1_{FA}) = \eta A$, lo que significa que Q determina la adjunción η . Igualmente, de lo que sigue se deduce que Q^{-1} determina la coadjunción ϵ mediante $Q^{-1}(1_{UB}) = \epsilon B$ y por tanto podemos decir que en la biyección Q se corresponden ηA con 1_{FA} para todo A de $\mathbb{A}$ y ϵB con 1_{UB} para todo B de $\mathbb{B}$. (N. del T.)

⁹Es fácil ver que las definiciones dadas de Q y Q^{-1} realmente producen funciones inversas una de la otra. Por ejemplo, para ver que $Q(Q^{-1}(f)) = f$ se usa la naturalidad de η en la forma $(UFf) \cdot (\eta A) = (\eta(UB)) \cdot f$ para calcular $Q(Q^{-1}(f)) = Q((\epsilon B) \cdot (Ff)) = (U((\epsilon B) \cdot (Ff))) \cdot (\eta A) = (U(\epsilon B) \cdot (UFf)) \cdot (\eta A) = U(\epsilon B) \cdot ((UFf) \cdot (\eta A)) = U(\epsilon B) \cdot ((\eta(UB)) \cdot f) = (U(\epsilon B) \cdot (\eta(UB))) \cdot f = f$. (N. del T.)

¹⁰En el original, *adjointness*. (N. del T.)

¹¹En el original se usa la expresión *generalized limits*, que era la terminología usada en aquella época (1968) para lo que hoy se conoce simplemente como “límites”. Igualmente, más abajo traducimos *generalized colimits* simplemente como “colímites”. (N. del T.)

$\mathbb{A}$. Y, dualmente, un funtor F sólo puede tener un adjunto por la derecha si F conmuta salvo isomorfismo con todos los colímites que existan en $\mathbb{A}$ y en $\mathbb{B}$. En lo que acabamos de decir para cualquier funtor $\mathbb{D}' \xrightarrow{L} \mathbb{D}$ los límites y colímites en $\mathbb{A}$ según L son, cuando existen, respectivamente adjuntos por la derecha y por la izquierda al funtor inducido $\mathbb{A}^L$. Esos colímites incluyen los límites directos en el sentido usual así como productos libres y *sumas amalgamadas*¹² y adjuntos de evaluación. Para muchas $\mathbb{A}$ importantes, los colímites según L existen para todo L con $\mathbb{D}'$ y $\mathbb{D}$ más pequeñas que cualquier cardinal regular fijo, pero existirán para todo L sin restricción si y sólo si $\mathbb{A}$ es una categoría en la que los morfismos se reducen a nada más que un preorden de los objetos, respecto al cual el último forma un retículo completo.

El teorema general del funtor adjunto asegura que si un funtor $\mathbb{B} \xrightarrow{U} \mathbb{A}$ satisface la condición necesaria (de continuidad) mencionada más arriba, entonces tendrá un adjunto por la izquierda supuesto que $\mathbb{B}$ sea adecuadamente completa y U adecuadamente acotado. El teorema especial del funtor adjunto de Freyd muestra que ciertas categorías $\mathbb{B}$ (tales como la categoría de conjuntos o la de grupos abelianos) son “compactas” en el sentido de que cada funtor continuo U a una categoría estándar $\mathbb{A}$ (como la categoría de conjuntos) está acotado. Un esquema que formalizase esos teoremas de funtores adjuntos para el caso de que $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ se reemplacen por metacategorías comparables al universo conceptual, por un lado justificaría por sí mismo una gran porción de la riqueza existencial de ese universo, como se deduce de la siguiente sección (al menos en lo que concierne a los tipos superiores y de los objetos infinitos) y por otro lado proporcionaría una racional común para la inevitabilidad y propiedades básicas de un gran número de construcciones matemáticas, como los siguientes ejemplos indican.

Denotando **Top** la categoría de las aplicaciones continuas y los espacios topológicos, el funtor diagonal

$$\mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Top} \times \mathbf{Top}$$

tiene un adjunto por la izquierda que fuerza la definición de la topología producto. Si A denota, digamos, al intervalo unitario entonces

$$\mathbf{Top} \xrightarrow{A \times (-)} \mathbf{Top}$$

también tiene un adjunto por la derecha que proporciona la construcción de la topología abierto compacta en los espacios de caminos. El funtor de inclusión **Comp** $\rightarrow$ **Top** de la categoría de aplicaciones continuas entre espacios compactos tiene un adjunto por la izquierda que proporciona la construcción de la compactificación de Stone Čech.

¹²En el original *pushouts*. (N. del T.)

Volviéndonos ahora al álgebra, el funtor de olvido $\mathbf{Gps} \rightarrow \mathbf{Set}$ que considera a cada homomorfismo de grupos como una aplicación entre los conjuntos subyacentes tiene un adjunto por la izquierda que proporciona la construcción de grupos libres. El “corchete conmutador” $\mathbf{Asoc} \rightarrow \mathbf{Lie}$, que interpreta cada homomorfismo de álgebras lineales asociativas como un homomorfismo de los espacios vectoriales subyacentes vistos solamente como álgebras de Lie, también tiene un adjunto por la izquierda que proporciona la construcción de las álgebras universales envolventes. Esas dos situaciones de adjunción pertenecen a una amplia clase que también incluye la abelianización de grupos, anillos monoide, álgebras simétricas, etc.

También existen situaciones de adjunción en análisis que proporcionan la construcción de espacios ℓ_1 y funciones casi-periódicas. Sobra decir que el considerar explícitamente todas esas construcciones como situaciones adjuntas tiene cierta utilidad formal y conceptual aparte de cualquier intento filosófico de unificar su necesidad.

III. El propio formalismo de la teoría de categorías se presenta con frecuencia en términos “geométricos”. De hecho, dar una categoría es dar significado a la palabra *morfismo* y a la *conmutatividad* de diagramas como

$$A \xrightarrow{f} B, \quad A \xrightarrow{f} B \downarrow g \quad A \xrightarrow{f} B \downarrow b \\ \quad \quad \quad \searrow h \quad \quad \quad \searrow a \quad \quad \quad \searrow a \\ \quad \quad \quad C \quad \quad \quad A' \xrightarrow{f'} B'$$

—en los cuales hay morfismos— de tal forma que las obvias condiciones de asociatividad e identidad se cumplan, así como la condición de que siempre que $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$ sean conmutativos exista un único h tal que

$$A \xrightarrow{f} B \downarrow g \\ \quad \quad \quad \searrow h \quad \quad \quad C$$

sea conmutativo. Para ahorrar espacio también se dice que A es el dominio y que B es el codominio de f cuando $A \xrightarrow{f} B$ es conmutativo y en particular que h es la composición $g \cdot f$ si

$$A \xrightarrow{f} B \downarrow g \\ \quad \quad \quad \searrow h \quad \quad \quad C$$

es conmutativo¹³. Consideramos los *objetos* como coextensivos con morfismos identidad o equivalentemente con aquellos morfismos que aparecen como dominios y codominios. Como es costumbre, llamamos *isomorfismo* a todo morfismo que tiene un inverso por ambos lados.

Cualquier categoría $\mathbb{A}$ tiene asociada otra, $\mathbb{A}^{\text{op}}$, obtenida al mantener la interpretación de “morfismo” pero invirtiendo la dirección de todas las flechas cuando se reinterpretan los diagramas y su conmutatividad.

Así, $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathbb{A}^{\text{op}}$ significa $B \xrightarrow{f} A$ en $\mathbb{A}$ y $h = g \cdot f$ en $\mathbb{A}^{\text{op}}$ significa $h = f \cdot g$ en $\mathbb{A}$; claramente las interpretaciones de “dominio”, “codominio” y “composición” determinan la interpretación de “diagramas conmutativos” generales. El teórico categórico le debe una disculpa al lector filosófico por este uso, desgraciadamente adoptado de forma general, de la palabra “conmutatividad” en un contexto más general que cualquiera que pudiera razonablemente tener una descripción en términos de “intercambiabilidad”.

Un *functor* F involucra a una categoría dominio $\mathbb{A}$ a una categoría codominio $\mathbb{B}$ y a una aplicación que asigna a cada morfismo x de $\mathbb{A}$, un morfismo Fx de $\mathbb{B}$ de tal forma que conserva la conmutatividad de diagramas. (Por tanto en particular un functor conserva objetos, dominios, codominios, composición e isomorfismos.) Usando la composición usual de aplicaciones para definir diagramas conmutativos de funtores se ve que los funtores son los morfismos de una super-categoría, normalmente llamada la (meta-) categoría de categorías.

Una categoría con exactamente un morfismo será designada por $\mathbb{1}$. Está determinada de forma única salvo isomorfismo por el hecho de que para cualquier categoría $\mathbb{A}$ existe exactamente un functor $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{1}$. Los funtores $\mathbb{1} \rightarrow \mathbb{A}$ se corresponden biyectivamente con los objetos en $\mathbb{A}$.

Una *transformación natural* φ involucra a una categoría dominio $\mathbb{A}$ a una categoría codominio $\mathbb{B}$, a funtores dominio y codominio

$$\mathbb{A} \begin{matrix} \xrightarrow{F_0} \\ \xrightarrow{F_1} \end{matrix} \mathbb{B}$$

y a una aplicación que asigna a cada objeto A de $\mathbb{A}$ un morfismo en $\mathbb{B}$

$$F_0 A \xrightarrow{\varphi^A} F_1 A$$

¹³En este artículo el autor utiliza la notación “diagramática”, ya en desuso, para la composición de morfismos escribiendo $r \cdot s$ para la composición de $X \xrightarrow{r} Y \xrightarrow{s} Z$. En toda esta traducción se ha usado la notación actual para las composiciones, que, por otra parte fue la notación usada por el autor desde finales de los años 70. (*N. del T.*)

de tal forma que para cada morfismo $A \xrightarrow{a} A'$ en $\mathbb{A}$ el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F_0 A & \xrightarrow{\varphi^A} & F_1 A \\ F_0 a \downarrow & & \downarrow F_1 a \\ F_0 A' & \xrightarrow{\varphi^{A'}} & F_1 A' \end{array}$$

es conmutativo en $\mathbb{B}$. Para $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ fijas, las transformaciones naturales entre funtores de $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ son los morfismos de una *categoría de funtores* $\mathbb{B}^{\mathbb{A}}$ donde escribimos

$$F_0 \xrightarrow{\varphi} F_1 \quad \text{en} \quad \mathbb{B}^{\mathbb{A}}$$

para la situación descrita más arriba y definimos la conmutatividad de triángulos

$$\begin{array}{ccc} F_0 & \xrightarrow{\varphi} & F_1 \\ & \searrow \bar{\varphi} \cdot \varphi & \downarrow \bar{\varphi} \\ & & F_2 \end{array} \quad \text{en} \quad \mathbb{B}^{\mathbb{A}}$$

por la condición

$$(\bar{\varphi} \cdot \varphi)A = (\bar{\varphi}A) \cdot (\varphi A) \quad \begin{array}{ccc} F_0 A & \xrightarrow{\varphi^A} & F_1 A \\ & \searrow (\bar{\varphi} \cdot \varphi)^A & \downarrow \bar{\varphi}^A \\ & & F_2 A \end{array}$$

para todos los objetos A en $\mathbb{A}$.

También existe una segunda *multiplicación* ("de Godement") de transformaciones naturales definida de tal forma que extiende en cierto sentido la composición de funtores. A saber: si

$$F_0 \xrightarrow{\varphi} F_1 \quad \text{en} \quad \mathbb{B}^{\mathbb{A}} \quad \text{y} \quad G_0 \xrightarrow{\psi} G_1 \quad \text{en} \quad \mathbb{C}^{\mathbb{B}}$$

entonces $G_0 F_0 \xrightarrow{\psi \varphi} G_1 F_1$ en $\mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ es la transformación natural que asigna a cada objeto A de $\mathbb{A}$ el morfismo de $\mathbb{C}$ que puede ser descrito indiferentemente por cualquiera de las dos composiciones en el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G_0 F_0 A & \xrightarrow{G_0(\varphi A)} & G_0 F_1 A \\ \psi(F_0 A) \downarrow & & \downarrow \psi(F_1 A) \\ G_1 F_0 A & \xrightarrow{G_1(\varphi A)} & G_1 F_1 A \end{array}$$

La multiplicación de Godement es funtorial

$$\mathbb{B}^{\mathbb{A}} \times \mathbb{C}^{\mathbb{B}} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$$

lo cual significa en particular que

$$(\bar{\psi} \cdot \psi)(\bar{\varphi} \cdot \varphi) = (\bar{\psi}\bar{\varphi}) \cdot (\psi\varphi)$$

y es asociativa, lo que significa que si además tenemos $H_0 \xrightarrow{\zeta} H_1$ en $\mathbb{D}^C$ entonces

$$\zeta(\psi\varphi) = (\zeta\psi)\varphi \quad \text{en } \mathbb{D}^A.$$

Otras reglas se deducen de los hechos de que en cualquier categoría producto $\mathbb{L} \times \mathbb{M}$ (cuya definición es obvia) se cumple una especie de relación de conmutatividad¹⁴

$$\begin{array}{ccc} \langle L, m \rangle \cdot \langle l, M \rangle = \langle l, M' \rangle \cdot \langle L', m \rangle & \langle L', M \rangle & \xrightarrow{\langle L', m \rangle} \langle L', M' \rangle \\ & \downarrow \langle l, M \rangle & \downarrow \langle l, M' \rangle \\ & \langle L, M \rangle & \xrightarrow{\langle L, m \rangle} \langle L, M' \rangle \end{array}$$

para

$$L' \xrightarrow{l} L \quad \text{en } \mathbb{L} \quad \text{y} \quad M \xrightarrow{m} M' \quad \text{en } \mathbb{M},$$

y que si la multiplicación de Godement se aplica a transformaciones naturales identidad, se reduce a la composición de los correspondientes funtores.¹⁵

Dos casos intermedios serán importantes para lo que sigue: Si $F_0 = \varphi = F_1 = F$ entonces¹⁶

$$(\psi F)A = \psi(FA)$$

mientras que si $G_0 = \psi = G_1 = G$ entonces $(G\varphi)A = G(\varphi A)$. Por tanto cada funtor $\mathbb{A} \xrightarrow{F} \mathbb{B}$ induce via la multiplicación de Godement por F un funtor $\mathbb{C}^{\mathbb{B}} \xrightarrow{\mathbb{C}^F} \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ para cualquier categoría $\mathbb{C}$ y de forma similar todo $\mathbb{B} \xrightarrow{G} \mathbb{C}$ induce $\mathbb{B}^{\mathbb{A}} \xrightarrow{G^{\mathbb{A}}} \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$ para cualquier categoría $\mathbb{A}$.

Llegamos ahora al concepto central, del que vamos a ver a continuación muchos ejemplos. Una *situación de adjunción* involucra a dos categorías $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, dos funtores

$$\mathbb{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{U} \end{array} \mathbb{B}$$

¹⁴El autor utiliza la identificación entre objetos y morfismos identidad para denotar con un mismo símbolo un objeto y su morfismo identidad. (N. del T.)

¹⁵La mult. de Godement de $\mathbb{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ 1_F \Downarrow \\ \xleftarrow{F} \end{array} \mathbb{B} \begin{array}{c} \xrightarrow{G} \\ 1_G \Downarrow \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathbb{C}$ es $\mathbb{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{GF} \\ 1_{GF} \Downarrow \\ \xleftarrow{GF} \end{array} \mathbb{C}$ es decir $1_G 1_F = 1_{GF} = GF$, con lo que simplemente tenemos el funtor compuesto. (N. del T.)

¹⁶La mult. de Godement de $\mathbb{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ 1_F \Downarrow \\ \xleftarrow{F} \end{array} \mathbb{B} \begin{array}{c} \xrightarrow{G_0} \\ \psi \Downarrow \\ \xleftarrow{G_1} \end{array} \mathbb{C}$ es $\mathbb{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{G_0 F} \\ \psi F \Downarrow \\ \xleftarrow{G_1 F} \end{array} \mathbb{C}$ dado por $(\psi F)A = \psi(FA)$. (N. del T.)

y dos transformaciones naturales

$$\begin{array}{c} \mathbb{A} \xrightarrow{\eta} UF \quad \text{en } \mathbb{A}^{\mathbb{A}} \\ \mathbb{A} \xrightarrow{\quad \eta \downarrow \quad} \mathbb{A} \\ \mathbb{A} \xrightarrow{F} \mathbb{B} \xrightarrow{U} \mathbb{A} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{c} FU \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{B} \quad \text{en } \mathbb{B}^{\mathbb{B}} \\ \mathbb{B} \xrightarrow{U} \mathbb{A} \xrightarrow{F} \mathbb{B} \\ \mathbb{B} \xrightarrow{\quad \epsilon \downarrow \quad} \mathbb{B} \end{array}$$

que satisfacen dos ecuaciones (triángulos conmutativos)

$$\begin{array}{c} \epsilon F \cdot F \eta = F \quad \text{en } \mathbb{B}^{\mathbb{A}} \\ \text{o, para cada objeto } A \text{ de } \mathbb{A}, \\ FA \xrightarrow{F(\eta A)} FUFA \xrightarrow{\epsilon(FA)} FA . \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{c} U \epsilon \cdot \eta U = U \quad \text{en } \mathbb{A}^{\mathbb{B}} \\ \text{o, para cada objeto } B \text{ de } \mathbb{B}, \\ UB \xrightarrow{\eta(UB)} UFUB \xrightarrow{U(\epsilon B)} UB . \end{array}$$

Damos inmediatamente una forma equivalente de la definición. Denotemos¹⁷ $F/\mathbb{B}$ la categoría cuyos morfismos son los cuádruples de morfismos: uno, $A \xrightarrow{a} A'$ en $\mathbb{A}$ y tres, $B \xrightarrow{b} B'$, $FA \xrightarrow{h} B$, $FA' \xrightarrow{h'} B'$ en $\mathbb{B}$ para los que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{Fa} & FA' \\ h \downarrow & & \downarrow h' \\ B & \xrightarrow{b} & B' \end{array}$$

es conmutativo en $\mathbb{B}$; los diagramas conmutativos en $F/\mathbb{B}$ se definen de tal forma que olvidando el h y h' de arriba define un funtor

$$F/\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A} \times \mathbb{B} .$$

Los objetos de $F/\mathbb{B}$ corresponden, pues, a pares consistentes en un objeto A en $\mathbb{A}$ y un morfismo $FA \xrightarrow{h} B$ en $\mathbb{B}$. Análogamente se define una categoría¹⁸ $\mathbb{A}/U$ cuyos objetos corresponden a pares formados por un morfismo $A \xrightarrow{f} UB$ en $\mathbb{A}$ con un objeto B dado en $\mathbb{B}$ y que también tiene un funtor de olvido

$$\mathbb{A}/U \longrightarrow \mathbb{A} \times \mathbb{B} .$$

Se puede demostrar que dar η, ϵ que satisfagan las condiciones anteriores para completar una situación de adjunción es equivalente a dar un funtor

$$F/\mathbb{B} \xrightarrow{Q} \mathbb{A}/U$$

¹⁷En el original aparece la notación antigua $(F, \mathbb{B})$ que fue el origen de la terminología “comma category” (“categoría coma”) que más tarde se tornó en “slice category” (“categoría cortada”). (N. del T.)

¹⁸En el original aparece la notación antigua $(\mathbb{A}, U)$. Véase la nota al pie número 17.

que conmuta¹⁹ con los funtores de olvido a $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$

$$\begin{array}{ccc} F/\mathbb{B} & \xrightarrow{Q} & \mathbb{A}/U \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathbb{A} \times \mathbb{B} & \end{array}$$

y que tiene un inverso (por ambos lados)

$$\mathbb{A}/U \xrightarrow{Q^{-1}} F/\mathbb{B}.$$

En particular, Q asigna a un objeto $FA \xrightarrow{h} B$ de $F/\mathbb{B}$ el objeto

$$A \xrightarrow{(Uh) \cdot (\eta A)} UB$$

de $\mathbb{A}/U$ (²⁰), mientras que Q^{-1} asigna a un objeto $A \xrightarrow{f} UB$ de $\mathbb{A}/U$ el objeto²¹

$$FA \xrightarrow{(\epsilon B) \cdot (Ff)} B$$

de $F/\mathbb{B}$. A veces se le llama a Q una adjuncionalidad²², a η una adjunción y a ϵ una coadjunción para F y U ; si tales existen, F se llama el *adjunto por la izquierda* de U y U el *adjunto por la derecha* de F y se escribe $F \dashv U$. En breve, F y U pueden colocarse en una situación de adjunción si y sólo si es posible dar biyecciones

$$(FA, B) \cong (A, UB) \quad \frac{FA \rightarrow B}{A \rightarrow UB}$$

de una forma que es “natural” o “funtorial” cuando A y B varían. Aquí, en el miembro de la izquierda se representa el conjunto de todos los morfismos $FA \xrightarrow{h} B$ en $\mathbb{B}$ (objetos de $F/\mathbb{B}$) y en el miembro de la derecha el conjunto de todos los morfismos $A \xrightarrow{f} UB$ en $\mathbb{A}$ (objetos de $\mathbb{A}/U$).

¹⁹Esta condición garantiza que (en lo que respecta a los objetos de $F/\mathbb{B}$ y $\mathbb{A}/U$) Q lleva morfismos $FA \rightarrow B$ de $\mathbb{B}$ a morfismos $A \rightarrow UB$ de $\mathbb{A}$. (N. del T.)

²⁰En particular, si $B = FA$ y h es su morfismo identidad, se tiene $Q(1_{FA}) = \eta A$, lo que significa que Q determina la adjunción η . Igualmente, de lo que sigue se deduce que Q^{-1} determina la coadjunción ϵ mediante $Q^{-1}(1_{UB}) = \epsilon B$ y por tanto podemos decir que en la biyección Q se corresponden ηA con 1_{FA} para todo A de $\mathbb{A}$ y ϵB con 1_{UB} para todo B de $\mathbb{B}$. (N. del T.)

²¹Es fácil ver que las definiciones dadas de Q y Q^{-1} realmente producen funciones inversas una de la otra. Por ejemplo, para ver que $Q(Q^{-1}(f)) = f$ se usa la naturalidad de η en la forma $(UFf) \cdot (\eta A) = (\eta(UB)) \cdot f$ para calcular $Q(Q^{-1}(f)) = Q((\epsilon B) \cdot (Ff)) = (U((\epsilon B) \cdot (Ff))) \cdot (\eta A) = (U(\epsilon B) \cdot (UFf)) \cdot (\eta A) = U(\epsilon B) \cdot ((UFf) \cdot (\eta A)) = U(\epsilon B) \cdot ((\eta(UB)) \cdot f) = (U(\epsilon B) \cdot (\eta(UB))) \cdot f = f$. (N. del T.)

²²En el original, *adjointness*. (N. del T.)

Las situaciones de adjunción tienen varias propiedades generales. Una de ellas es que los adjuntos son únicos (si existen), esto es, cualesquiera dos situaciones de adjunción con un $\mathbb{A} \xrightarrow{F} \mathbb{B}$ dado (como adjunto por la izquierda) son isomorfismos de forma única y similarmente ocurre para un $\mathbb{B} \xrightarrow{U} \mathbb{A}$ dado (como adjunto por la derecha). Con mayor generalidad, dadas dos situaciones de adjunción para la $\mathbb{A}$ y la $\mathbb{B}$ fijas (denotando los adjuntos y adjunciones de una situación con apóstrofes y los correspondientes de la otra sin apóstrofes), entonces toda transformación natural $F' \rightarrow F$ induce una única $U \rightarrow U'$ y recíprocamente. Otra propiedad es que si $\mathbb{A} \xrightarrow{F} \mathbb{B}$, con $F \dashv U$, y $\mathbb{B} \xrightarrow{\tilde{F}} \mathbb{C}$, con $\tilde{F} \dashv \tilde{U}$, entonces $\tilde{F}F \dashv \tilde{U}U$ y también se cumple que para cualquier categoría $\mathbb{D}$, $F^{\mathbb{D}} \dashv U^{\mathbb{D}}$. Por tanto, una condición necesaria para que un funtor U tenga un adjunto por la izquierda es que U conmute (salvo isomorfismo de funtores) con todos los límites²³ que existan en $\mathbb{B}$ y $\mathbb{A}$. Y, dualmente, un funtor F sólo puede tener un adjunto por la derecha si F conmuta salvo isomorfismo con todos los colímites que existan en $\mathbb{A}$ y en $\mathbb{B}$. En lo que acabamos de decir para cualquier funtor $\mathbb{D}' \xrightarrow{L} \mathbb{D}$ los límites y colímites en $\mathbb{A}$ según L son, cuando existen, respectivamente adjuntos por la derecha y por la izquierda al funtor inducido $\mathbb{A}^L$. Esos colímites incluyen los límites directos en el sentido usual así como productos libres y sumas amalgamadas²⁴ y adjuntos de evaluación. Para muchas $\mathbb{A}$ importantes, los colímites según L existen para todo L con $\mathbb{D}'$ y $\mathbb{D}$ más pequeñas que cualquier cardinal regular fijo, pero existirán para todo L sin restricción si y sólo si $\mathbb{A}$ es una categoría en la que los morfismos se reducen a nada más que un preorden de los objetos, respecto al cual el último forma un retículo completo.

El teorema general del funtor adjunto asegura que si un funtor $\mathbb{B} \xrightarrow{U} \mathbb{A}$ satisface la condición necesaria (de continuidad) mencionada más arriba, entonces tendrá un adjunto por la izquierda supuesto que $\mathbb{B}$ sea adecuadamente completa y U adecuadamente acotado. El teorema especial del funtor adjunto de Freyd muestra que ciertas categorías $\mathbb{B}$ (tales como la categoría de conjuntos o la de grupos abelianos) son “compactas” en el sentido de que cada funtor continuo U a una categoría estándar $\mathbb{A}$ (como la categoría de conjuntos) está acotado. Un esquema que formalizase esos teoremas de funtores adjuntos para el caso de que $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ se reemplacen por metacategorías comparables al universo conceptual, por un lado justificaría por sí mismo una gran porción de la riqueza existencial de ese universo, como se deduce de la siguiente sección (al menos en lo que concierne a los tipos superiores y de los objetos infinitos) y por otro lado proporcionaría

²³En el original se usa la expresión *generalized limits*, que era la terminología usada en aquella época (1968) para lo que hoy se conoce simplemente como “límites”. Igualmente, más abajo traducimos *generalized colimits* simplemente como “colímites”. (N. del T.)

²⁴En el original *pushouts*. (N. del T.)

una racional común para la inevitabilidad y propiedades básicas de un gran número de construcciones matemáticas, como los siguientes ejemplos indican.

Denotando **Top** la categoría de las aplicaciones continuas y los espacios topológicos, el funtor diagonal

$$\mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Top} \times \mathbf{Top}$$

tiene un adjunto por la izquierda que fuerza la definición de la topología producto. Si A denota, digamos, al intervalo unitario entonces

$$\mathbf{Top} \xrightarrow{A \times (-)} \mathbf{Top}$$

también tiene un adjunto por la derecha que proporciona la construcción de la topología abierto compacta en los espacios de caminos. El funtor de inclusión **Comp** $\rightarrow$ **Top** de la categoría de aplicaciones continuas entre espacios compactos tiene un adjunto por la izquierda que proporciona la construcción de la compactificación de Stone Čech.

Volviéndonos ahora al álgebra, el funtor de olvido **Gps** $\rightarrow$ **Set** que considera a cada homomorfismo de grupos como una aplicación entre los conjuntos subyacentes tiene un adjunto por la izquierda que proporciona la construcción de grupos libres. El “corchete conmutador” **Asoc** $\rightarrow$ **Lie**, que interpreta cada homomorfismo de álgebras lineales asociativas como un homomorfismo de los espacios vectoriales subyacentes vistos solamente como álgebras de Lie, también tiene un adjunto por la izquierda que proporciona la construcción de las álgebras universales envolventes. Esas dos situaciones de adjunción pertenecen a una amplia clase que también incluye la abelianización de grupos, anillos monoide, álgebras simétricas, etc.

También existen situaciones de adjunción en análisis que proporcionan la construcción de espacios ℓ_1 y funciones casi-periódicas. Sobra decir que el considerar explícitamente todas esas construcciones como situaciones adjuntas tiene cierta utilidad formal y conceptual aparte de cualquier intento filosófico de unificar su necesidad.

IV. Si $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ son conjuntos parcialmente ordenados, es fácil ver que la noción tradicional de *conexión de Galois* entre ellos es equivalente a una situación de adjunción

$$\mathcal{O}_1^{\text{op}} \rightleftarrows \mathcal{O}_2$$

entre las correspondientes obvias categorías (una de ellas cambiada por la opuesta). Recientemente ha comenzado a percibirse que los ejemplos básicos de conexiones de Galois son realmente simples fragmentos de adjuntos más globales que involucran categorías no triviales que contienen más información.

Por ejemplo, la propia teoría de Galois ha sido tratada con provecho como el estudio de situaciones adjuntas del tipo

$$\mathbf{Alg}_k^{\text{op}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \mathbf{Set}^{\text{Gal}(\bar{k}, k)}$$

donde la categoría de la izquierda tiene como objetos todas las álgebras lineales asociativas y conmutativas sobre el cuerpo k y la de la derecha todas las representaciones como permutaciones continuas del grupo compacto de Galois del cierre separable $\bar{k}$ de k , mientras que el funtor de izquierda a derecha, adjunto por la derecha, asigna a cada k -álgebra A la representación por permutaciones del conjunto $\mathbf{Alg}_k(A, \bar{k})$ de todos los homomorfismos de álgebras $A \rightarrow \bar{k}$. Restringiéndonos por un lado a las subálgebras de $\bar{k}$ y por otro a los cocientes de las representaciones regulares recuperamos, en efecto, la conexión de Galois usual. De forma similar, en geometría algebraica la conexión de Galois entre los ideales en un anillo de polinomios $k[x_1, \dots, x_n]$ y los subconjuntos de k^n queda globalizada a una situación de adjunción

$$\mathbf{Alg}_k^{\text{op}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{spec}} \\ \xleftarrow{\Gamma} \end{array} \mathbf{Schema}_k$$

con un provecho considerable.

Finalmente, en los Fundamentos existe la conocida conexión de Galois entre conjuntos de axiomas y clases de modelos para un conjunto fijo de variables de relación R_i . Globalizar a un par adjunto permite hacer precisos de una forma unificada los efectos semánticos no sólo de incrementar los axiomas sino también de omitir algunos símbolos de relación o de reinterpretarlos, y si tratamos con *categorías* de modelos nos permitirá que lo último determine sus propios conjuntos totales de variables de relaciones naturales dando así un nuevo significado a la teoría de definibilidad fuera del ámbito de las clases axiomáticas. Hacer esto para una especie dada —ecuacional, elemental, de orden superior, etc.— de, digamos, teorías de varias especies²⁵ indicadas por un conjunto I , uno define una situación de adjunción

$$\mathbf{Teorías}^{\text{op}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{semántica}} \\ \xleftarrow{\text{estructura}} \end{array} (\mathbf{Cat}, [\mathbf{Set}^I]) = \mathbf{Cat}/\mathbf{Set}^I$$

en donde el lado de la derecha denota una categoría cuyos morfismos son triángulos conmutativos de funtores

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C}' \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathbf{Set}^I & \end{array}$$

²⁵En el original: *I*-sorted theories.

con $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}'$ categorías más o menos arbitrarias. La noción invariante de teoría que es apropiada aquí, en todos los casos considerados por el autor, ha sido expresada de la forma más natural identificando una teoría T con una categoría de cierto tipo, en cuyo caso la semántica (categoría de modelos) de T es cierta subcategoría de la categoría de funtores $T \rightarrow \mathbf{Set}^I$. Hay entonces una nueva situación adjunta

$$\mathbf{Formal} \xrightleftharpoons{\quad} \mathbf{Teorías}$$

que describe la presentación de teorías invariantes por medio de los lenguajes formalizados apropiados a las especies. Componiendo este con el anterior e identificando tentativamente lo Conceptual con las categorías de la forma general $(\mathbf{Cat}, [\mathbf{Set}^I])$, llegamos a una familia de situaciones adjuntas

$$\mathbf{Formal}^{\text{op}} \xrightleftharpoons{\quad} \mathbf{Conceptual}$$

(una para cada especie de teoría) que uno puede razonablemente esperar que constituya los fragmentos de una descripción precisa de la dualidad con la que comenzamos esta discusión.