Teoria delle categorie e attività umane quotidiane

F. W. Lawvere

Attività umane quotidiane
come costruire una casa su un pendio;
posa di una rete di condotti telefonici;
navigare nel sistema solare;
richiedono piani che possano funzionare.

Pianificare qualsiasi impresa di questo tipo richiede di

Pensare allo Spazio.

Ogni sviluppo implica molti passaggi di pensiero e anche molte costruzioni geometriche correlate sugli spazi. A causa della natura multi-fase di questa concezione dello spazio, per realizzarla è necessario adottare misure esclusivamente matematiche e affidabili. Principi espliciti di pensiero (logica) e principi espliciti di spazio (geometria) sono una parte necessaria per un'affidabilità garantita.

Il grande progresso compiuto dalla teoria delle categorie, inventata 60 anni fa' da Eilenberg e Mac Lane, ha permesso ai matematici di esplicitare i principi della logica e della geometria. Ciò è stato ottenuto scoprendo la forma comune di logica e di geometria; quindi anche i principi del rapporto tra le due sono diventati espliciti. In un senso importante questo ha risolto un problema aperto 2000 anni fa da Aristotele con i suoi primi tentativi di creare categorie di concetti.

Nel 21° secolo, questa soluzione è applicabile non solo alla geometria piana e ai sillogismi medievali, ma anche agli 'spazi' di trasformazione a dimensione infinita, agli "spazi" di dati e ad altri strumenti concettuali che vengono applicati migliaia di volte al giorno. I categoristi hanno scoperto che la forma dei principi sia della logica che della geometria poggia sulla "naturalità" delle trasformazioni tra spazi e delle trasformazioni tra i pensieri. La naturalità si applica anche alle trasformazioni tra il Pensiero e lo Spazio; quel rapporto stesso divenne così oggetto di attendibile elaborazione e sviluppo sulla base dello stesso principio unificante.

Che cosa è, più precisamente, questa "naturalità"? Non si riferisce a qualcosa che sorge spontaneamente nella Natura (sebbene possa essere importante nelle teorie della fisica), ma piuttosto alle aspettative naturali di un Pensiero attento.

Tra tutte le possibili prestazioni in presenza di un piano, potrebbe essere necessario individuare quelle che costituiscono esecuzioni appropriate del piano. Per esempio, un'esecuzione musicale produce una mappa da un intervallo temporale in uno spazio di suoni (possibili frequenze e ampiezze), ma un recital implica sia un'esecuzione reale (in tempo reale e suono) sia anche una "esecuzione" simbolica da parte del compositore. in un intervallo temporale simbolico e in uno spazio sonoro simbolico. (Per secoli i compositori hanno scritto il tempo simbolico orizzontalmente e lo spazio sonoro simbolico verticalmente, anche se noi non lo mostriamo qui.) L'idea astratta x che la Notazione N simbolica possa essere interpretata nella Realtà, realtà che ha molte interpretazioni rilevanti; in particolare, questa idea x è comune a

$\mathcal{T}$ = misurazione di un intervallo spaziale di tempo π (tempus)
(per esempio con metrónomo)

$\mathcal{S}$ = specificazione del significato sonoro
(per esempio potremmo considerare $\mathcal{S}$ implicito
nel lavoro di Guido d'Arezzo[1])

[1]Guido D'Arezzo scrisse "I Fondamenti della Musica", un trattato medievale molto importante; e vero, perché è conosciuto globalmente di aver sviluppato il sistema di notazione musicale occidentale. Guido D'Arezzo, un teorista di musica moderna, visse nel undicesimo secolo.

Quindi, l'esecuzione simbolica d'un compositore, insieme all'esecuzione reale di un artista, costituisce una "recita" naturale $\rho : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ se è soddisfatta l'equazione di naturalità

$$\rho(\mathfrak{R})\mathcal{T}(x) = \mathcal{S}(x)\rho(\mathfrak{N}).$$

In generale, c'è piú di un solo aspetto (x) della struttura comune, sia al dominio sia al codominio, di un processo naturale, ma l'equazione è la stessa per entrambi x. Un'utile visione geometrica di queste equazioni è fornita da diagrammi

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T}(\mathfrak{N}) \arrow[r, "\rho(\mathfrak{N})"] \arrow[d, "\mathcal{T}(x)"'] & \mathcal{S}(\mathfrak{N}) \arrow[d, "\mathcal{T}(x)"] \\ \mathcal{T}(\mathfrak{R}) \arrow[r, "\rho(\mathfrak{R})"'] & \mathcal{S}(\mathfrak{R}) \end{tikzcd} \qquad \text{per tutti} \qquad \begin{tikzcd} \mathfrak{N} \arrow[d, "x"'] \\ \mathfrak{R} \end{tikzcd}$$

per esempio un metrónomo

Sia da un punto di vista intensivo, sia che appunto matematico, si può dire in generale che nello

$$\begin{tikzcd} \textbf{SPAZIO} \arrow[loop above] \arrow[r, shift left] & \textbf{PENSIERO} \arrow[loop above] \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

Tutte le quattro frecce son naturali![2]

Traduzione Stefano Kasangian

[2]Anche la Funtorialità è un caso speciale della naturalitá.