

Teoría de Categorías y actividades humanas cotidianas

F. W. Lawvere

Actividades humanas cotidianas tales como
construir una casa en una colina;
tender una red de conductos telefónicos;
navegar el sistema solar;
requieren planes que sean viables

Planear cualquier tal empresa requiere el desarrollo del
Pensamiento acerca del Espacio.

Cada desarrollo requiere muchas etapas de pensamiento y también muchas construcciones geométricas relacionadas en el espacio. Debido a la naturaleza de capas múltiples de este pensar sobre el espacio, medidas matemáticas únicas deben ser tomadas para hacerlo confiable. Principios explícitos de pensamiento (lógica) y principios explícitos de espacio (geometría) son una parte necesaria de una confianza garantizada.

El gran avance hecho por la teoría de categorías, inventada hace 60 años por Eilenberg y Mac Lane, le permitió a los matemáticos hacer los principios de lógica y geometría explícitos. Esto fue logrado mediante el descubrimiento de una forma de lógica y geometría común; en consecuencia, los principios de la relación entre los dos se ha también vuelto explícita. En un sentido importante esto ha resultado un problema abierto hace 2000 años por Aristóteles, con sus incursiones iniciales para hacer las categorías de conceptos.

En el siglo XXI, esta solución es aplicable no solo a la geometría plana y a los silogismos medievales, sino también a los espacios infinito-dimensionales de transformaciones, a “espacios” de datos y a otras herramientas conceptuales que son aplicadas miles de veces al día. Fue descubierto, por los categóricos, que la forma de los principios tanto de lógica como de geometría descansa sobre la “naturalidad” de las transformaciones entre espacios y las transformaciones entre los pensamientos. La naturalidad se aplica asimismo a las transformaciones entre Pensamiento y Espacio; dicha relación se volvió, ella misma, sujeta a elaboración y desarrollo confiable sobre la base del mismo principio unificador.

Pero, con mayor precisión, ¿qué es precisamente esta “naturalidad”? No se refiere a algo que tenga un origen espontáneo en la Naturaleza (aunque puede ser importante en teorías físicas), sino más bien a las expectativas naturales de Pensamiento cuidadoso.

Entre todas las presentaciones posibles en la presencia de un plan, podríamos necesitar señalar aquellas que son ejecuciones apropiadas del plan. Por ejemplo,

una presentación musical produce una función del intervalo de tiempo en un espacio de sonidos (posibles frecuencias y amplitudes), pero un recital involucra tanto una presentación real (en tiempo y sonido reales) como también una “presentación” simbólica por el compositor en un intervalo de tiempo simbólico y un espacio simbólico de sonido. (Por siglos, los compositores han denotado al tiempo simbólico de manera horizontal y al espacio simbólico de sonido de manera vertical, aunque no mostramos esto aquí.) Entonces la idea abstracta x , esa Notación simbólica puede ser interpretada dentro de la Realidad. La Realidad tienen muchas instancias relevantes, en particular, es común a ambas

\mathcal{T} = medición de un intervalo de tiempo y
 \mathcal{S} = especificación de significado sonoro.

(Por ejemplo, podríamos considerar a \mathcal{S} implícita en el trabajo de Guido d’Arezzo.)¹ Entonces una presentación simbólica por un compositor, junto con una presentación por un artista constituye un recital natural $\rho: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ si se satisface la naturalidad de la ecuación

$$\rho(\mathfrak{A})\mathcal{T}(x) = \mathcal{S}(x)\rho(\mathfrak{N}).$$

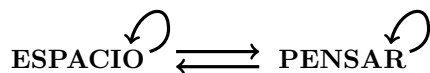
En general hay más que solamente el aspecto x de estructura común a ambas, fuente y destino de un proceso natural, pero la ecuación es la misma para cada uno. Una visión geométrica útil de tales ecuaciones es provista por diagramas como

In general, there is more than just the one aspect x of structure common to both, source and target of a natural process, but the equation is the same for each. A helpful geometric view of such equations, is provided by diagrams like

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}(\mathfrak{N}) \xrightarrow{\rho(\mathfrak{N})} \mathcal{S}(\mathfrak{N}) & & \mathfrak{N} \\ \mathcal{T}(x) \downarrow & \text{para todo} & x \downarrow \\ \mathcal{T}(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\rho(\mathfrak{A})} \mathcal{S}(\mathfrak{A}) & & \mathfrak{A} \end{array}$$

read: \mathfrak{N} = symbolic $\mathcal{T}(x)$ = *eg* pupil’s metronome

Tanto intuitiva como matemáticamente, podemos decir en general que en



!las cuatro flechas, todas ellas, son naturales!

Traducción Francisco Marmolejo

¹Guido d’Arezzo escribió “Los Fundamentos de Música”, un tratado medieval muy importante; es verdad porque se le acredita ampliamente el desarrollo moderno del sistema de notación musical Occidental. Guido d’Arezzo, un teórico musical mediavel, vivió en el siglo XI. (Wikipedia)