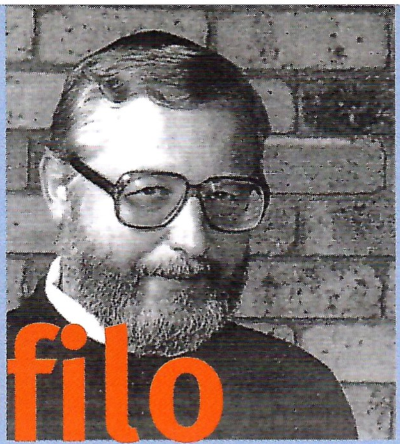


Categorie e spazio: un profilo

Una guida per orientare la comprensione e la ricerca in diversi settori della matematica. Il potere unificante delle categorie

di **F. William Lawvere**

a cura di **Federico G. Lastaria**

F. William Lawvere (nato nel 1937 nello stato dell'Indiana, U.S.A.) appartiene a quel genere di matematici - rarissimi in ogni epoca - che aprono nuove strade, creano intere teorie e unificano teorie precedenti.

Nella sua tesi di dottorato - completata nel 1963 sotto la direzione di Samuel Eilenberg, uno dei fondatori della teoria delle categorie - Lawvere introduce un tipo particolare di categorie, le "teorie algebriche": l'algebra universale viene liberata dalla sua dipendenza artificiale dalle presentazioni con l'introduzione di idee e risultati nuovi, usati poi estensivamente in topologia algebrica e in informatica teorica. Nel 1967 mostra che certi topos, con particolari oggetti infinitesimali, forniscono un quadro geometrico flessibile per i modelli della fisica del continuo. Questo risultato apre la strada a un nuovo campo di ricerca noto come "geometria differenziale sintetica", con applicazioni al calcolo delle variazioni, alla classificazione delle singolarità di mappe lisce e alle equazioni differenziali.

Al Congresso Internazionale dei Matematici di Nizza, nel 1970, Lawvere introduce una versione algebrica della teoria dei topos (sviluppata in collaborazione con il matematico americano Myles Tierney) che unifica aree della geometria, della logica e della teoria degli insiemi, ritenute prima di allora senza legami tra loro.

Lo studio dei concetti fondamentali della pratica matematica lo conduce inevitabilmente ai fondamenti della matematica stessa, in un'accezione però che non ha nulla a che spartire con la tradizione delle scuole di Frege e Russell: "fondamenti significherà qui lo studio di ciò che è universale in matematica. Così i Fondamenti in questo senso non possono essere identificati con alcun 'punto di partenza' o 'giustificazione' per la matematica, sebbene alcuni parziali risultati in queste direzioni possano essere tra i loro frutti. Tra gli altri frutti dei Fondamenti così definiti, ci sarebbero però presumibilmente delle linee guida per passare da una branca della matematica a un'altra e per valutare, in qualche misura, quali direzioni di ricerca è verosimile che siano rilevanti." (F.W. Lawvere, Adjointness in Foundations, *Dialectica, 23, 1969).*

Negli anni '60 Lawvere fonda la "logica categoriale", mostrando, ad esempio, come la teoria degli spazi metrici e la logica dei predicati di ordine supe-

35

Fatima e Bill Lawvere

riore possano essere unificate all'interno della teoria delle categorie. In seguito descrive un approccio funtoriale ai sistemi dinamici caotici e allo studio dell'entropia nella termomeccanica dei sistemi in stato di non-equilibrio.

Negli ultimi anni, Lawvere ha definito per la prima volta, in termini matematici precisi, alcuni concetti fondamentali in matematica e in fisica: quelli di quantità intensive e di quantità estensive, di categorie di spazi e di categorie di quantità.

Determinare i concetti generali astratti che travalicano i confini artificiali tra geometria, meccanica, analisi, algebra, logica significa per Lawvere anche trovare i modi migliori per comprenderli e insegnarli. Così non sorprende il fatto che le ricerche culminate nella teoria algebrica dei topos, ad esempio, abbiano preso le mosse dal problema di insegnare la matematica nel modo più efficace agli studenti dei primi anni di università. E così pure lo sviluppo della geometria differenziale sintetica è stato motivato da un problema concreto: "come imparare, sviluppare e usare le ipotesi fisiche in termomeccanica dei continui in un modo che sia rigoroso ma al tempo stesso semplice, non impigliato in una ragnatela di apparati analitici tecnici".

Afferma ancora Lawvere: "tutti devono usare la tecnologia, che si fonda sulla scienza, che si fonda sulla matematica; eppure pochi hanno una conoscenza operativa dei concetti fondamentali della matematica moderna, quali retrazioni, teoremi di punto fisso, omomorfismi di grafi diretti e di sistemi dinamici, prodotti galileiani, funzionali eccetera. Quali passi pedagogici fare in concreto per ridurre questa enorme frattura nella società moderna?". Lawvere e il matematico americano Steve Schanuel hanno raccolto questa sfida scrivendo insieme, nel 1991, il libro "Conceptual Mathematics" (edizione italiana: "Teoria delle categorie: un'introduzione alla matematica. Matematica concettuale", Franco Muzzio Editore, Padova, 1994); si tratta del primo libro che insegna a usare metodi categoriali fondamentali in matematica, informatica, fisica e logica, applicandoli con ricchezza di esempi allo studio di categorie elementari, quali ad esempio gli insiemi finiti, i grafi diretti e i sistemi dinamici.

L'articolo "Categorie e spazio: un profilo", che presentiamo in questo inserto, delinea il quadro concettuale generale necessario per orientare la comprensione e la ricerca in diverse branche della matematica e per indagarne le interconnessioni in modo dialettico.

Federico G. Lastaria

1 Introduzione

Lo sviluppo del pensiero matematico produce incessantemente una grande varietà di sistemi. Un sistema costituito da figure e dalle loro relazioni di incidenza può dar luogo a uno "spazio" particolare; d'altra parte un sistema di quantità e di operazioni su di esse può dar luogo a una particolare "algebra". Ciascun sistema del genere deve essere considerato in se stesso come un oggetto ben determinato; tuttavia è caratteristico della pratica matematica considerare anche la vasta gamma di "mutamenti" e trasformazioni di tali oggetti in altri dello stesso genere. Ad esempio, un anello in cui c'è una quantità x può diventare un altro anello in cui c'è una quantità y per cui $y^2 = x^3 + 1$. Questo "mutamento" può essere registrato nella trasformazione che è l'omomorfismo dal primo anello al secondo. Uno spazio può diventare un altro spazio in modo tale che ciascun singolo punto dia origine a diversi punti; e ciò può essere registrato come una trasformazione di rivestimento, "covering", dal secondo spazio al primo. Questo frequente divenire e trasformarsi è caratteristico della pratica matematica, ma allo stesso tempo ogni oggetto deve rimanere assolutamente determinato mentre calcoliamo e ragioniamo deduttivamente.

Il riconoscimento esplicito di tale dialettica si rese necessario e divenne possibile cinquant'anni fa, producendo una guida estremamente articolata a tutte le discipline matematiche e alle loro interconnessioni. Spero che il presente articolo possa contribuire a rendere disponibile tale guida a un pubblico più vasto. Gli strumenti principali sono le idee di categoria, funtore, trasformazione naturale, funtore aggiunto, categoria abeliana, topos, fibrazione, categoria chiusa, categoria arricchita (per quest'ultima nozione, si veda [5]): tutte queste idee servono tanto a imparare e usare, quanto a sviluppare ulteriormente tutte le discipline matematiche, ma in particolare quelle che risultano essere altamente dialettiche, come la topologia algebrica, la geometria algebrica, l'analisi funzionale e la logica d'ordine superiore. Molti sviluppi moderni, come l'omologia dei gruppi e dell'algebra, il ruolo della nozione di fascio nella geometria algebrica, lo sfruttamento dell'aspetto "dottrinale" nella logica e nella teoria dei modelli e dell'aspetto "iperdottrinale" nell'informatica teorica, sarebbero stati difficilmente possibili senza l'uso esplicito della teoria delle categorie. (Sono in fase di sviluppo anche applicazioni ad altri settori, per esempio alla teoria statistica delle decisioni e alla meccanica razionale).

Nel seguito, dopo aver richiamato i concetti fondamentali della teoria delle categorie, metteremo in evidenza le loro motivazioni originarie e la loro utilità mediante vari esempi. Progressivamente, la rilevanza di tali concetti si focalizza in rapporto alla nozione di spazio. L'analisi dello spazio in termini di "figure" e quella in termini di "quantità" (algebriche) vengono a essere unificate in una stessa cornice teorica, attraverso condizioni di (co-)adeguatezza. Sia gli aspetti algebrici dello spazio sia gli aspetti geometrici dell'algebra sono, in tal modo, esaminati e correlati tra loro; in particolare si mostra che la nozione di "spettro" è una nozione chiave per collegare le "dottrine" algebriche e la teoria dei fasci. Come risultato, gli stessi operatori logici sono visti da una prospettiva più intrinseca e oggettiva. Un tema ricorrente è quello degli aggiunti, che emergerà nel correlare categorie di specie diverse.

Quanto segue va inteso come un percorso introduttivo, che si propone di mettere in evidenza il potere unificante e l'ampiezza fondazionale della teoria delle categorie, nonché la fecondità degli sviluppi che sono resi possibili dalla concezione categoriale dello spazio.

2 Le definizioni fondamentali

Ogni categoria consiste di *morfismi* (ognuno dei quali potrebbe essere un processo specifico che cambia la forma concreta lasciando invariata la forma astratta). Ciascun morfismo m va da un ben determinato *oggetto* A della categoria, chiamato *dominio* del morfismo, a un ben determinato oggetto B della categoria, chiamato *codominio* del morfismo; queste due relazioni sono utilmente compendiate nel diagramma

$$A \xrightarrow{m} B.$$

L'operazione fondamentale sui morfismi è la *composizione*, denotata semplicemente giustapponendo i nomi dei morfismi, ma letta "segue"; si dice che un diagramma di tre morfismi è *commutativo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "m"] \arrow[dr, "p"'] & B \arrow[d, "n"] \\ & C \end{tikzcd}$$

se p è (ha lo stesso effetto di) n segue m, e si scrive $p = nm$. La composizione nm può essere fatta solo quando il codominio di m e il dominio di n sono lo *stesso* oggetto (B nel diagramma) e in tal caso il suo dominio e il suo codominio sono quelli indicati (A e C). Ogni oggetto A ha un particolare endomorfismo 1_A, detto morfismo identità, con la proprietà:

$$1_B m = m = m 1_A$$

per ogni morfismo m, come indicato nel diagramma.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "m"'] \arrow[dr, "m"] & B \arrow[d, "m"] \\ A \arrow[r, "1_B"'] & B \end{tikzcd}$$

(Un *endomorfismo* di un oggetto A è un qualunque morfismo il cui dominio e il cui codominio sono entrambi A; un endomorfismo è convenientemente rappresentato nel diagramma da un cappio.) L'ultimo assioma per una categoria è l'*associatività* della composizione:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "ma"'] & A \arrow[d, "m"] \arrow[dr, "nm"] & \\ & B \arrow[r, "n"'] & C \end{tikzcd} \qquad n(ma) = (nm)a.$$

Un morfismo è un *isomorfismo* se ha un inverso bilatero

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "m"] & B \arrow[l, shift left, "m^{-1}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} mm^{-1} = 1_B \\ m^{-1}m = 1_A \end{array}$$

e due oggetti sono detti *isomorfi* se esiste almeno un isomorfismo tra essi; ogni proprietà di un oggetto, che può essere espressa in termini delle sue relazioni con tutti gli altri oggetti, rimane vera o falsa per ogni oggetto isomorfo all'oggetto dato. Nel caso in cui tutti i morfismi siano isomorfismi, la categoria è detta *gruppoide*.

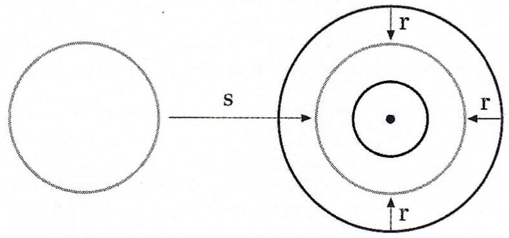
Un gruppoide con un solo oggetto è un *gruppo*. Gli endomorfismi invertibili di un oggetto costituiscono il suo *gruppo degli automorfismi*. Nel 1872, il programma di Erlangen di F. Klein tentò di esprimere tutte le proprietà di oggetti geometrici usando particolari gruppoidi, come il gruppoide i cui oggetti sono i sottoinsiemi dello spazio euclideo e i cui morfismi sono le biiezioni che conservano la distanza tra punti.

Sebbene i gruppoidi siano estremamente importanti, è risultato essenziale considerare anche categorie in cui ci sono molti morfismi che non sono isomorfismi.

Quando abbiamo due morfismi:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "r"] & A \arrow[l, shift left, "s"] \end{tikzcd}$$

per cui $r\,s = 1_C$, s è detto una *sezione* di r e r è detto una *retrazione* di s (diversamente dall'inverso bilatero di un isomorfismo, le sezioni e le retrazioni di solito non sono uniche); per esempio, in una categoria opportuna, s potrebbe essere l'inclusione di una circonferenza come la circonferenza centrale di un anello e r la retrazione centrale dell'intero anello su tale circonferenza, che in particolare non muove la circonferenza stessa.



Il lettore sarà in grado di mostrare che, se definiamo $e = sr$, allora e è *idempotente* ($ee = e$) se $rs = 1_C$ e anche che, se $r_1 s_1 = 1_{C_1}$, $r_2 s_2 = 1_{C_2}$, sono due "spezzamenti" dello stesso idempotente ($s_1 r_1 = s_2 r_2$) su A, allora C_1 e C_2 sono isomorfi. Ad ogni categoria $\mathscr{C}$ è associata la sua *opposta* $\mathscr{C}^{op}$ in cui dominio e codominio dei morfismi sono scambiati; ogni nozione categoriale, interpretata in $\mathscr{C}^{op}$, fornisce la nozione *duale* in $\mathscr{C}$; ad esempio la nozione di retrazione è duale a quella di sezione.

3 Aspetti astratti e concreti di concetti generali

L'inevitabilità dei morfismi deriva dalla natura di uno strumento che l'umanità ha sviluppato da molti secoli: il "concetto generale". Questo strumento riflette il mondo reale in modo tale da facilitare la reciproca influenza del pensare collettivo e individuale, rendendo così possibile l'ideazione e la realizzazione di piani. Un concetto generale come "cane" o "città" nasce da esempi particolari e ha due aspetti: quello generale astratto e quello generale concreto. L'aspetto generale astratto concentra l'essenziale degli esempi particolari nel concetto generale in se stesso per condurre ragionamenti formali e per eseguire calcoli, mentre nel generale concreto si considerano tutti gli esempi oggettivamente possibili del concetto, compresi gli esempi partico-

Analizzare i morfismi

La ricerca di retrazioni e di sezioni per un morfismo è un caso particolare del problema di analizzare un morfismo rispetto all'operazione sintetizzante di composizione. Dati due morfismi p e n con lo stesso codominio, un *sollevamento* di p lungo n è un qualsiasi morfismo m per cui $nm = p$:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "n"] & \\ A \arrow[ur, dotted, "m"] \arrow[rr, "p"'] & & C \end{tikzcd}$$

mentre, dati due morfismi p e m con lo stesso dominio, una *estensione* di p lungo m è un qualunque morfismo n per cui $nm = p$.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, dotted, "n"] & \\ A \arrow[ur, "m"] \arrow[rr, "p"'] & & C \end{tikzcd}$$

A causa della natura non commutativa della composizione, questi due problemi di fattorizzazione tendono ad avere contenuti specifici assai diversi, anche se le due proprietà sono formalmente duali. Infatti, un morfismo n è *A-iniettivo* se per ogni p di dominio A esiste *al più* un sollevamento m di p lungo n e n è un monomorfismo se è *A-iniettivo* per tutti gli A; dualmente, un morfismo m è un epimorfismo se è C-co-iniettivo per tutti i C, nel senso che per ogni morfismo p di codominio C c'è al più una estensione di p lungo m. Alcune altre importanti proprietà di morfismi sono espresse in termini di esistenza, invece che di unicità, delle loro analisi: n è *A-suriettivo* se per ogni morfismo p con dominio A e con lo stesso codominio di n, c'è almeno un sollevamento di p lungo n. (È facile vedere che n è *A-suriettivo* per ogni A se e solo se n ha almeno una sezione). Dualmente, un morfismo m e un oggetto C potrebbero essere nella relazione "ogni morfismo p il cui codominio è C e il cui dominio è quello di m ha almeno una estensione lungo m"; è ormai usuale esprimere questa relazione di "co-suriettività" dicendo che C è un *oggetto iniettivo* relativamente a m; per esempio, in topologia un oggetto "solido" ha questa proprietà di estensione rispetto a tutte le funzioni iniettive m il cui dominio e codominio sono "compatti".

I morfismi sufficientemente suriettivi tendono a essere epimorfismi e in alcune categorie (come nella categoria $\mathcal{S}$ degli insiemi astratti e delle funzioni qualsiasi tra essi) gli epimorfismi sono A-suriettivi per molti A (a causa dell'assioma di scelta). Nel caso in cui l'iniettività dei morfismi segua dalla A-iniettività per pochi particolari A, questi ultimi possono essere usati come "forme fondamentali delle figure" per una analisi geometrica della categoria, come visto nella sezione 5; dualmente, se la suriettività può essere provata solo a partire da pochi oggetti C, allora questi ultimi possono essere usati come "spazi fondamentali per i valori delle funzioni" per una analisi algebrica della categoria. Si osservi che un morfismo sufficientemente iniettivo e sufficientemente suriettivo è un isomorfismo, a causa della natura esistenziale della suriettività; tuttavia, per un morfismo la pura proprietà di cancellazione data dall'essere simultaneamente monomorfismo ed epimorfismo *non* implica la sua invertibilità, come ad esempio nella categoria degli spazi di Hilbert.

Una importante possibilità di analisi è data dalla *fattorizzazione attraverso l'immagine*, che vale nelle categorie in cui ogni morfismo f può essere espresso come $f = ip$, con i iniettivo e p un opportuno epimorfismo: il terzo oggetto prodotto da questa fattorizzazione attraverso l'immagine incorpora il "rango" di f.

Infine, si noti che la nozione di sollevamento può essere usata per definire che cos'è un sottosistema "aperto" in ogni categoria relativamente a un morfismo dato α: $U \hookrightarrow R$, che può servire da aperto generico. Un esempio abbastanza frequente è dato dall'inclusione, in un anello R, della parte che consiste degli elementi invertibili. Data una funzione $X \xrightarrow{f} R$, f determina un sottosistema di X che consiste di tutte le figure x tali che fx si solleva lungo α. Così, diventa chiaro che ogni morfismo nella categoria data risulta continuo relativamente ad α, nel senso di questi aperti. Nel caso della geometria algebrica, questa definizione ha bisogno di una ulteriore precisazione, perché dà il risultato corretto solo per gli spazi affini, che servono anche come fonti di figure. Per spazi Y più generali, un sottosistema U è aperto, nel senso più fine, se per ogni figura affine $X \xrightarrow{y} Y$ il sottosistema di tutti gli x tali che yx in U è α-aperto nel senso precedente.

lari originali, ma di solito molti di più (la gamma estensionale del concetto).

È proprio perché consideriamo due città come concretizzazioni dello stesso concetto astratto che siamo condotti a confrontarle rispetto alla popolazione, al clima, alla storia, ai prodotti che offrono, all'amministrazione, ecc. Molte categorie matematiche sono generali concreti in questo senso e, via via che riusciamo a modellare matematicamente i concetti generali che emergono nell'attività del pensiero e si manifestano nel linguaggio umano, si formano nuove categorie. In una categoria, i morfismi sono di solito processi di "confronto" molto precisi, che penetrano in profondità i caratteri specifici dei vari oggetti. Per esempio, simmetrie particolari possono suggerire un certo grup-

po G (diciamo, il gruppo con due elementi) come concetto generale astratto; possiamo allora considerare la categoria di tutte le sue possibili rappresentazioni concrete in qualche categoria $\mathcal{C}$ ben conosciuta (come quella degli spazi e funzioni continue tra essi o quella degli spazi e trasformazioni lineari).
Se A e B sono oggetti di $\mathcal{C}$ che fanno da supporto a due rappresentazioni dello stesso gruppo G, allora un morfismo $A \xrightarrow{m} B$ di $\mathcal{C}$ è "G-equivariante" se $mg = gm$, per ogni g in G; questi morfismi G-equivarianti sono i morfismi di una nuova categoria $\mathcal{C}^G$, il generale concreto che corrisponde a G. Se la cosa particolare da cui si è partiti era in $\mathcal{C}$, la si può vedere ora in maggior dettaglio come oggetto di $\mathcal{C}^G$ e ciò di solito darà origine ad altri oggetti nella stessa categoria $\mathcal{C}^G$, quali l'oggetto di tutte le posizioni della cosa nello spazio o l'oggetto di tutte le quantità variabili definite sulla cosa, ecc. L'esperienza ha mostrato che questo esempio fondamentale è tipico pure per un altro motivo: anche il generale *astratto* è una categoria (nel nostro esempio G è un gruppoide con un solo oggetto)! Così, le categorie consentono di trattare ambedue gli aspetti dei concetti, il generale astratto e il generale concreto, nonché di esprimere le loro mutue relazioni.
In effetti, ci sono numerose "dottrine" che servono a dare un senso preciso alle nozioni di "particolare", "generale astratto" e "generale concreto" oltre che alle loro relazioni. (Le dottrine dell'algebra generale e della teoria dei fasci saranno descritte nella sezione 8). In modo tipico, una dottrina si riferisce a una specifica categoria di categorie strutturate, cui appartiene ciascun "generale astratto" (detto anche "teoria") della dottrina, unitamente a un'ulteriore, ben determinata, categoria "duale" di categorie strutturate, cui appartengono i corrispondenti "generali concreti".
In questo senso, la dottrina delle rappresentazioni via permutazioni si riferisce alla categoria dei gruppoidi, come pure alla sua "duale", una certa categoria di topos booleani. Spesso la relazione fra astratto e concreto rimanda in maniera specifica a categorie di funtori, che saranno discusse nel seguito.

4 Trasformazione di categorie in topologia algebrica

La *categoria delle categorie* ha come oggetti "tutte" le categorie $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, ... e come morfismi $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ ha tutti i *funtori*, cioè i processi F che assegnano un oggetto FC di $\mathcal{D}$ a ogni oggetto C di $\mathcal{C}$ e un morfismo $F(m)$ in $\mathcal{D}$ ad ogni morfismo m di $\mathcal{C}$ in modo che si abbia sempre:

$$A \xrightarrow[\text{in } \mathcal{C}]{m} B \implies FA \xrightarrow[\text{in } \mathcal{D}]{F(m)} FB$$

$$F(nm) = F(n)F(m)$$

$$F(1_B) = 1_{FB}.$$

La necessità di rendere espliciti tali processi emerse negli anni '30 dai progressi dell'analisi funzionale e della topologia algebrica. In particolare, è stato in topologia algebrica, con i suoi tipici passaggi dagli spazi continui agli aspetti qualitativi misurati dall'omotopia e dall'omologia, che W. Hurewicz ha introdotto i diagrammi di frecce, usandoli esplicitamente sia per le funzioni continue tra spazi topologici, sia per gli omomorfismi di gruppi, nella consapevolezza che i funtori "gruppo di omotopia" inducono morfismi nella categoria dei gruppi, che riflettono le proprietà di una data funzione continua nella categoria degli spazi.
Sono stati S. Eilenberg e S. Mac Lane che negli anni '40 hanno reso esplicite queste idee. Una scoperta decisiva è stata quella degli spazi che portano il loro nome, cioè spazi che rappresentano i funtori di coomologia sulla categoria dell'omotopia. S. Eilenberg e N. Steenrod hanno poi usato sistematicamente funtori e trasformazioni naturali nella loro fondazione assiomatica della teoria dell'omologia.
Il funtore più fondamentale in topologia algebrica è π_0, che assegna a ogni spazio continuo X l'insieme discreto $\pi_0 X$ delle *componenti connesse* di X e assegna a ogni morfismo (funzione continua) da uno spazio a un altro la funzione indotta sulle componenti. Il funtore π_0 delle componenti connesse è caratterizzato come l'aggiunto sinistro (si veda la sezione 5) al funtore che include la categoria degli spazi discreti nella categoria degli spazi localmente connessi per cammini; così, ogni funzione continua da uno spazio X a uno spazio discreto D dipende solamente dalla funzione naturale da X a π_0X. Se in X due punti qualsiasi possono essere connessi da un cammino continuo in X, allora $\pi_0 X = 1$ (un solo punto), mentre in uno spazio discreto X la mancanza di cammini implica invece $\pi_0 X = X$.
Per esempio, se A è uno spazio costituito da un segmento di retta e da un punto non appartenente ad esso, A può essere incluso in un disco con una funzione continua $A \xrightarrow{m} X$. Allora $\pi_0 A$ è un insieme con due elementi, mentre π_0X è un insieme con un solo elemento, poiché il disco è connesso; perciò m è iniettivo ma non suriettivo,

mentre $\pi_0(m)$ è suriettivo ma non iniettivo. Ciò mostra che queste importanti proprietà dei morfismi non sono necessariamente conservate dai funtori e che quindi, per poter impiegare i funtori, i codomini delle funzioni debbono essere esplicitamente menzionati.

Dovevano trascorrere circa quarant'anni prima che gli spazi di Eilenberg-Mac Lane fossero trattati dal punto di vista della teoria dei topos (il cui ambito comprende applicazioni alla logica e alla teoria dei modelli così come alla geometria) da A. Joyal e G. Wraith nel convegno di Denver del 1983 [3]; in quello stesso convegno sono stati presentati lavori sul calcolo delle variazioni e sulle connessioni combinatorie. I rendiconti del convegno svoltosi ad Aarhus nel 1983 [4] e di quello svoltosi a Como nel 1990 [1] descrivono lavori più recenti e riflettono la varietà di sviluppi che quest'ambito di ricerche ha avuto; l'articolo "Categories of Space and of Quantity", [10], fornisce una trattazione filosofica della costruzione che porta alla categoria dell'omotopia.

5 Categorie di funtori e condizioni di adeguatezza

La nozione di trasformazione naturale può essere illustrata considerando, oltre al funtore π_0, anche il funtore $|\ |$ che assegna a ogni spazio continuo l'insieme discreto dei suoi *punti*. Per ogni spazio X è definita un'applicazione:

$$|X| \xrightarrow{f_X} \pi_0 X$$

che assegna ad ogni punto x la componente connessa $f_X(x)$ di X in cui e contenuto x. Tale f è "naturale", nel senso che per ogni morfismo continuo m da uno spazio A ad uno spazio B, è soddisfatta la seguente equazione di compatibilità:

$$f_B|m| = \pi_0(m) f_A \qquad \begin{tikzcd} {|A|} \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "|m|"'] & \pi_0 A \arrow[d, "\pi_0(m)"] \\ {|B|} \arrow[r, "f_B"'] & \pi_0 B \end{tikzcd}$$

Spesso si dice che "il quadrato è commutativo" per significare che un'equazione del genere è vera. In generale, date due categorie $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ e due funtori:

$$\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}$$

una *trasformazione naturale* $F \xrightarrow{t} G$ consiste nell'assegnare ad ogni oggetto X di $\mathcal{C}$ un *morfismo* $FX \xrightarrow{t_X} GX$ in $\mathcal{D}$, in modo che per ogni morfismo $A \xrightarrow{m} B$ in $\mathcal{C}$ il corrispondente quadrato commuti in $\mathcal{D}$. Viene così introdotta la *categoria* $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ *dei funtori* da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$, i cui oggetti sono tutti i funtori $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ e i cui morfismi sono tutte le trasformazioni naturali tra tali funtori, con l'ovvia definizione di composizione.

Quasi tutte le categorie concrete interessanti possono essere definite e studiate come sottocategorie di categorie di funtori: una notevole unificazione chiarificatrice. Gli oggetti e i morfismi di una categoria "grande" $\mathcal{X}$ possono essere efficacemente indagati purché prima si riesca a determinare una sottocategoria $\mathcal{A}$ di $\mathcal{X}$, "piccola" ma "adeguata". In tal caso, per ogni oggetto X i morfismi $A \xrightarrow{x} X$ possono essere chiamati "figure di forma A" in X, quando A è in $\mathcal{A}$. Per esempio, se $A = 1$ è un punto, allora abbiamo punti $1 \to X$ in X mentre, se A è un segmento, allora abbiamo i "cammini" $A \to X$ in X. In generale, le figure sono "singolari"; per esempio, se

$$1 \underset{a_2}{\overset{a_1}{\rightrightarrows}} A$$

sono gli estremi di un segmento di retta, allora un cammino $A \xrightarrow{x} X$ è un "cappio" o no a seconda che si abbia $xa_1 = xa_2$ o no.

Ancora, se B è una palla piena il cui bordo è la superficie sferica S e $S \hookrightarrow B$ è l'inclusione, allora una goccia $B \to X$ in X potrebbe avere il suo contorno schiacciato in un punto, il che è espresso dalla commutatività del diagramma seguente:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\ B \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

Il fatto che un cammino sia chiuso e che una figura sia singolare sono esempi di auto-incidenza mentre, più in generale, l'incidenza di due figure $A_1 \xrightarrow{x_1} X$, $A_2 \xrightarrow{x_2} X$ si riferisce a tutte le figure $A \xrightarrow{x} X$ simultaneamente "dislocate" in x_1 e x_2, nel senso che sono dati morfismi $A \xrightarrow{a_1} A_1$, $A \xrightarrow{a_2} A_2$ in $\mathcal{A}$ per cui $x_1 a_1 = x = x_2 a_2$. In tal modo si associa a ogni oggetto X una struttura geometrica di forma $\mathcal{A}$ - espressione con la quale si intende in generale un qualsiasi funtore $\mathcal{A}^{op} \to \mathcal{S}$, dove $\mathcal{S}$ è la categoria degli insiemi e delle funzioni - nel seguente modo:

mentre $\pi_0(m)$ è suriettivo ma non iniettivo. Ciò mostra che queste importanti proprietà dei morfismi non sono necessariamente conservate dai funtori e che quindi, per poter impiegare i funtori, i codomini delle funzioni debbono essere esplicitamente menzionati.

Dovevano trascorrere circa quarant'anni prima che gli spazi di Eilenberg-Mac Lane fossero trattati dal punto di vista della teoria dei topos (il cui ambito comprende applicazioni alla logica e alla teoria dei modelli così come alla geometria) da A. Joyal e G. Wraith nel convegno di Denver del 1983 [3]; in quello stesso convegno sono stati presentati lavori sul calcolo delle variazioni e sulle connessioni combinatorie. I rendiconti del convegno svoltosi ad Aarhus nel 1983 [4] e di quello svoltosi a Como nel 1990 [1] descrivono lavori più recenti e riflettono la varietà di sviluppi che quest'ambito di ricerche ha avuto; l'articolo "Categories of Space and of Quantity", [10], fornisce una trattazione filosofica della costruzione che porta alla categoria dell'omotopia.

5 Categorie di funtori e condizioni di adeguatezza

La nozione di trasformazione naturale può essere illustrata considerando, oltre al funtore π_0, anche il funtore $|\ |$ che assegna a ogni spazio continuo l'insieme discreto dei suoi *punti*. Per ogni spazio X è definita un'applicazione:

$$|X| \xrightarrow{f_X} \pi_0 X$$

che assegna ad ogni punto x la componente connessa $f_X(x)$ di X in cui e contenuto x. Tale f è "naturale", nel senso che per ogni morfismo continuo m da uno spazio A ad uno spazio B, è soddisfatta la seguente equazione di compatibilità:

$$f_B|m| = \pi_0(m) f_A \qquad \begin{array}{ccc} |A| & \xrightarrow{f_A} & \pi_0 A \\ {\scriptstyle |m|}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_0(m)} \\ |B| & \xrightarrow[f_B]{} & \pi_0 B \end{array}$$

Spesso si dice che "il quadrato è commutativo" per significare che un'equazione del genere è vera. In generale, date due categorie $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ e due funtori:

$$\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}$$

una *trasformazione naturale* $F \xrightarrow{t} G$ consiste nell'assegnare ad ogni oggetto X di $\mathcal{C}$ un *morfismo* $FX \xrightarrow{t_X} GX$ in $\mathcal{D}$, in modo che per ogni morfismo $A \xrightarrow{m} B$ in $\mathcal{C}$ il corrispondente quadrato commuti in $\mathcal{D}$. Viene così introdotta la *categoria* $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ *dei funtori* da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$, i cui oggetti sono tutti i funtori $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ e i cui morfismi sono tutte le trasformazioni naturali tra tali funtori, con l'ovvia definizione di composizione.

Quasi tutte le categorie concrete interessanti possono essere definite e studiate come sottocategorie di categorie di funtori: una notevole unificazione chiarificatrice. Gli oggetti e i morfismi di una categoria "grande" $\mathcal{X}$ possono essere efficacemente indagati purché prima si riesca a determinare una sottocategoria $\mathcal{A}$ di $\mathcal{X}$, "piccola" ma "adeguata". In tal caso, per ogni oggetto X i morfismi $A \xrightarrow{x} X$ possono essere chiamati "figure di forma A" in X, quando A è in $\mathcal{A}$. Per esempio, se $A = 1$ è un punto, allora abbiamo punti $1 \to X$ in X mentre, se A è un segmento, allora abbiamo i "cammini" $A \to X$ in X. In generale, le figure sono "singolari"; per esempio, se

$$1 \underset{a_2}{\overset{a_1}{\rightrightarrows}} A$$

sono gli estremi di un segmento di retta, allora un cammino $A \xrightarrow{x} X$ è un "cappio" o no a seconda che si abbia $xa_1 = xa_2$ o no.

Ancora, se B è una palla piena il cui bordo è la superficie sferica S e $S \hookrightarrow B$ è l'inclusione, allora una goccia $B \to X$ in X potrebbe avere il suo contorno schiacciato in un punto, il che è espresso dalla commutatività del diagramma seguente:

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & X \end{array}$$

Il fatto che un cammino sia chiuso e che una figura sia singolare sono esempi di auto-incidenza mentre, più in generale, l'incidenza di due figure $A_1 \xrightarrow{x_1} X$, $A_2 \xrightarrow{x_2} X$ si riferisce a tutte le figure $A \xrightarrow{x} X$ simultaneamente "dislocate" in x_1 e x_2, nel senso che sono dati morfismi $A \xrightarrow{a_1} A_1$, $A \xrightarrow{a_2} A_2$ in $\mathcal{A}$ per cui $x_1 a_1 = x = x_2 a_2$. In tal modo si associa a ogni oggetto X una struttura geometrica di forma $\mathcal{A}$ - espressione con la quale si intende in generale un qualsiasi funtore $\mathcal{A}^{op} \to \mathcal{S}$, dove $\mathcal{S}$ è la categoria degli insiemi e delle funzioni - nel seguente modo:

Limiti finiti e colimiti filtrati

Le categorie nelle quali esistono i limiti finiti sono anche dette "cartesiane", perché è proprio in tali categorie che si possono eseguire certe costruzioni, tradizionalmente associate alla geometria analitica cartesiana. Per esempio, la curva definita dall'equazione $y^2 = x^3 + 1$ non solo rimanda a un prodotto cartesiano $P = Y \times X$, ma rimanda anche alla formazione del sottoggetto di P su cui le due corrispondenti funzioni da P a $\Re$ coincidono. Quest'ultima costruzione, spesso indicata come l'*equalizzatore*, è in effetti un limite finito, cioè l'aggiunto destro a un funtore diagonale $\mathcal{X} \to \mathcal{X}^{\mathcal{D}}$, ove la particolare categoria finita $\mathcal{D}$ è formata soltanto da due frecce astratte in parallelo. Si può mostrare che tutti i $\mathcal{D}$-limiti in $\mathcal{X}$, per $\mathcal{D}$ finita, sono costruibili come combinazioni di questi due casi, vale a dire $\mathcal{D}$ = la coppia di frecce in parallelo (il che permette di rappresentare mediante un oggetto le soluzioni di un'equazione) e $\mathcal{D}$ = una qualsiasi categoria discreta finita (ove i risultanti prodotti cartesiani permettono di rappresentare un sistema di equazioni come una singola equazione "vettoriale"). Ulteriori esempi di $\mathcal{D}$-limiti sono l'intersezione di sottoggetti e l'immagine inversa (cioè, la sostituzione o "*pullback*") di un sottoggetto lungo un morfismo. I funtori che conservano i limiti finiti vengono spesso chiamati "esatti a sinistra" (in inglese: "*left exact*", da cui l'abbreviazione "*lex*").

I colimiti sono aggiunti sinistri a funtori diagonali. Esempi di colimiti sono i coprodotti (per $\mathcal{D}$ diagramma di forma discreta), che sono noti, in categorie specifiche di vario tipo, come somme disgiunte, prodotti liberi o somme dirette. I colimiti comprendono anche (per D diagramma formato da una coppia di frecce parallele) i coequalizzatori, i quali danno luogo a oggetti quozienti (duali dei sottoggetti) di un dato oggetto Y, allorché una certa equazione, tra due morfismi da X a Y, è forzata a diventare vera imponendo una relazione d'equivalenza su Y. Di nuovo, abbiamo che due soli tipi di colimiti, i coprodotti e i coequalizzatori, sono sufficienti a costruire tutti i colimiti presenti in una data categoria (per esempio, le somme amalgamate, tra le quali ci sono le unioni disgiunte e i "*pushout*").

Quando limiti e colimiti furono inizialmente considerati, negli anni '30, si adottò la restrizione (non necessaria) a forme di diagrammi $\mathcal{D}$ che erano *insiemi parzialmente ordinati*; si assunse pure la restrizione a diagrammi di forma *filtrata* (superiormente diretti). Per un diagramma, "essere filtrato" è una proprietà più forte che "essere connesso", dato che (intuitivamente parlando) se $\mathcal{D}$ è filtrata, la connessione può sempre essere verificata muovendo verso destra, in $\mathcal{D}$, senza zigzagare indietro. I colimiti filtrati godono di specifiche proprietà davvero importanti, che invece non sono godute da altri colimiti (per esempio, dai coprodotti). Nella categoria degli insiemi (e in molte altre categorie strettamente collegate, come i topos e le categorie algebriche), i colimiti filtrati conservano prodotti cartesiani finiti ed equalizzatori (e, ovviamente, gli altri colimiti, come le unioni e quindi le immagini); di conseguenza, la categoria di tutte le strutture algebriche che soddisfano date condizioni elementari risulta essere chiusa rispetto a colimiti filtrati.

usando lo stesso simbolo X per la struttura associata, $X(A) = \mathcal{X}(A, X)$ = l'insieme delle figure di forma A in X e, dato un morfismo $A' \xrightarrow{a} A$, $X(A) \xrightarrow{X(a)} X(A')$ assegna a ogni $A \xrightarrow{x} X$ la figura indotta xa di forma A'. La richiesta funtorialità, $X(aa_1) = X(a_1)X(a)$ per $A'' \xrightarrow{a_1} A' \xrightarrow{a} A$, non è che un'istanza dell'associatività. Ma ancora l'associatività fa sì che ogni morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ in $\mathcal{X}$ conservi la relazione di incidenza di A-figure, $f(xa) = (fx)a$, dando luogo a un morfismo (= trasformazione naturale) nella categoria $\mathcal{S}^{\mathcal{A}^{op}}$ delle strutture geometriche di forma $\mathcal{A}$.

Nel 1960, J. Isbell ha chiamato $\mathcal{A}$ *adeguata* in $\mathcal{X}$, se il funtore ora definito:

$$\mathcal{X} \to \mathcal{S}^{\mathcal{A}^{op}}$$

è "pieno e fedele". Un funtore F da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$ si dice *pieno*, risp.: *fedele*, se per ogni A, B in $\mathcal{C}$ la corrispondenza tra i morfismi da A a B ed i morfismi da FA a FB è suriettiva, risp.: iniettiva. Nel caso in esame, il fatto di essere pieno e fedele significa che per ogni coppia di oggetti X e Y in $\mathcal{X}$, ogni trasformazione $\mathcal{A}$-naturale $X \dashrightarrow Y$ (tra gli associati funtori a valori in $\mathcal{S}$) è indotta da un unico morfismo della categoria $\mathcal{X}$.

Il quasi tautologico "Lemma di Yoneda", che generalizza i classici risultati di Cayley (quando $\mathcal{A}$ è un gruppo) e di Dedekind (quando $\mathcal{A}$ è un insieme parzialmente ordinato, cioè una categoria in cui fra ogni coppia di oggetti c'è al più un morfismo), garantisce tale pienezza e fedeltà almeno nel caso in cui X e Y sono oggetti di $\mathcal{A}$. Più precisamente, il Lemma afferma che, per qualunque Y in $\mathcal{S}^{\mathcal{A}^{op}}$ e per qualunque A in $\mathcal{A}$, ogni elemento y_A di $Y(A)$ è dato da $y = y_A(1_A)$ per un'unica trasformazione naturale y_A da $\mathcal{A}(-, A)$ verso Y.

In tal modo "ogni" categoria $\mathcal{X}$ può essere analizzata in termini di strutture geometriche, sfruttando la potenza di cal-

colo che deriva dalla natura di "topos" di $\mathcal{S}^{\mathcal{A}^{op}}$ e, in particolare, assicurando la possibilità di ridefinire Z mediante la caratterizzazione di quali oggetti di $\mathcal{S}^{\mathcal{A}^{op}}$ provengano da oggetti di $\mathcal{X}$. Il fatto che sia stato possibile risolvere problemi di calcolo delle variazioni infinito-dimensionali, duecento anni prima dell'avvento delle nozioni di spazio topologico e di spazio di Banach, è in parte dovuto proprio a questo metodo diretto.
Comunque, ci sono anche altre sottili relazioni che collegano la precedente condizione di adeguatezza al fatto che nella categoria $\mathcal{X}$, ogni oggetto sia un (co)limite di oggetti in $\mathcal{A}$.
Per ogni coppia di categorie $\mathcal{X}$, $\mathcal{D}$ esiste un funtore canonico "diagonale":

$$\mathcal{X} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{X}^{\mathcal{D}}$$

che assegna ad ogni X il corrispondente funtore costante su $\mathcal{D}$: $(\Delta X)(D) = X$, per ogni D. (Il funtore Δ può essere pieno e fedele o no: il lettore è invitato a mostrare che lo è per tutte le $\mathcal{X}$ solo se $\mathcal{D}$ è "connessa" mentre, se $\mathcal{D}$ è *discreta*, nel senso che gli unici morfismi sono le identità, e se ha almeno due oggetti, allora Δ è pieno e fedele se e solo se $\mathcal{X}$ è un insieme parzialmente ordinato). Con una locuzione introdotta da D. Kan negli anni '50, si dice che la categoria $\mathcal{X}$ ha *$\mathcal{D}$-limiti* se Δ ha un *aggiunto destro*, nel senso che Kan stesso diede al termine, vale a dire se esistono un funtore:

$$\mathcal{X}^{\mathcal{D}} \to \mathcal{X}$$

e una corrispondenza biunivoca naturale:

$$\frac{X \to \lim_{\leftarrow \mathcal{D}} F}{\Delta X \to F}$$

Più in generale, un funtore G da $\mathcal{C}'$ a $\mathcal{C}$ si dice "aggiunto destro" di F (e F "aggiunto sinistro" di G) se c'è una biiezione "naturale" tra i $\mathcal{C}$-morfismi $A \to GB$ e i $\mathcal{C}'$-morfismi $FA \to B$. Per esempio, se $\mathcal{D}$ è discreta, allora ogni F in $\mathcal{X}^{\mathcal{D}}$ non è altro che una famiglia di oggetti di $\mathcal{X}$ e $\lim_{\leftarrow \mathcal{D}} F$ risulta il *prodotto* (cartesiano) della famiglia; questo significa che esiste una famiglia di morfismi proiezione p_D indiciata dagli oggetti di $\mathcal{D}$, tale che *ogni* famiglia:

$$X \xrightarrow{f_D} FD, \quad D \in \mathcal{D}$$

è la famiglia delle proiezioni $f_D = p_D f$, per un unico morfismo $X \xrightarrow{f} \lim_{\leftarrow \mathcal{D}} F$ verso il prodotto.
Diremo che $\mathcal{X}$ ha prodotti finiti se esiste $\lim_{\leftarrow \mathcal{D}} F$ per ogni categoria finita discreta $\mathcal{D}$. Se $\mathcal{X}$ è munita di una sottocategoria $\mathcal{A}$, allora una figura in un $\mathcal{D}$-prodotto è determinata da una $\mathcal{D}$-famiglia di figure con la stessa forma e, se $\mathcal{D}$ è vuota, allora $\mathcal{X}$ ha un oggetto *terminale 1*, cioè un oggetto che ha esattamente una figura di ogni forma A.

6 Spazi di funzioni. Un'applicazione alla fisica

Se la data categoria $\mathcal{X}$ ha prodotti finiti e B è un oggetto dato, allora esiste un funtore "cilindro":

$$\mathcal{X} \xrightarrow{B \times (\ )} \mathcal{X}$$

che fa corrispondere a ogni oggetto il prodotto binario $B \times X$ e a ogni morfismo $X \xrightarrow{f} X'$ il morfismo $B \times X \xrightarrow{1_B \times f} B \times X'$. Affinché $B \times (\ )$ abbia un aggiunto destro $(\ )^B$, si deve avere per ogni Y uno "spazio di funzioni" Y^B, caratterizzato dalla regola di trasformazione espressa dalla corrispondenza biunivoca e naturale:

$$\frac{X \to Y^B}{B \times X \to Y}$$

Se si prende $X = Y^B$ e il morfismo identità, la regola fornisce un *morfismo di valutazione* canonico $B \times Y^B \to Y$, per cui ogni figura $A \to Y^B$ di forma A nello spazio di funzioni è univocamente determinata dal morfismo $B \times A \to Y$ che si ottiene applicando $B \times (\ )$ alla figura e componendo successivamente con la valutazione. Per esempio, i *cammini* in uno spazio di funzioni Y^B "sono" semplicemente funzioni (in $\mathcal{X}$) di tipo Y con una variabile in più. (Ci sono anche categorie chiuse rispetto a spazi di funzioni, i quali sono aggiunti a prodotti non cartesiani (si veda [8]).
Gli aggiunti sono unici a meno di isomorfismi. Pertanto i prodotti e gli spazi di funzioni sono determinati dai morfismi (figure) che li hanno come *codomini*, che a loro volta esprimono informazioni che possono essere trasformate in altre forme, che non si riferiscono esplicitamente al prodotto o agli spazi di funzioni in questione. Tuttavia, un morfismo il cui *dominio* è un prodotto o uno spazio di funzioni esprime informazioni che spesso non possono essere internalizzate nella categoria in nessun altro modo. I morfismi il cui dominio è un prodotto sono *operazioni algebriche*; per esempio:

$$X \times X \to X$$

è una operazione binaria (come la moltiplicazione in un gruppo di Lie), mentre

$$X \times Z \to Z$$

è una *azione di* X su Z (come l'azione di uno spazio lineare di vettori, per traslazione, su uno spazio piatto di punti). Identità algebriche quali l'associatività, la distributività, ecc., che possono essere soddisfatte da operazioni algebriche, sono espresse da diagrammi commutativi in $\mathcal{X}$.
Morfismi il cui dominio è uno spazio di funzioni sono chiamati *funzionali*; per esempio, se A è un segmento di retta, e se E è uno spazio metrico, allora:

$$E^A \to R$$

potrebbe essere la misura delle lunghezze dei cammini in E. Non si sottolineerà mai abbastanza quanto siano importanti gli spazi di funzioni e i funzionali per la geometria, l'analisi, la meccanica, ecc. Specificare Y^B come un oggetto di $\mathcal{X}$ significa che i funzionali $Y^B \to Z$ godono delle stesse condizioni che sono state imposte a tutti i morfismi di X (per esempio, la condizione di essere lisci), mentre la struttura geometrica di Y^B in $\mathcal{X}$ è determinata dalle sue figure, che a loro volta sono determinate dai morfismi $B \times A \to Y$, senza riferimento allo spazio di funzioni. Per esempio, una "variazione" è un cammino $A \to Y^B$ in uno spazio di funzioni e, se si sa già come differenziare le funzioni $B \times A \to R$, allora ogni funzionale $Y^B \to R$ (come il "tempo di discesa di una sferetta lungo una traiettoria $B \to Y$ in un campo gravitazionale", ecc.) ha un differenziale ben definito lungo ogni variazione.
Per illustrare l'uso degli spazi di funzioni nella termomeccanica dei continui, supponiamo che T denoti un intervallo di tempo, C un corpo materiale (per esempio una nuvola) e S una porzione convessa dell'ordinario spazio fisico. Allora, un particolare movimento di C in S, di durata T, può essere descritto da un morfismo $T \times C \to S$, che a sua volta può essere seguito, poniamo, da un campo di radiazioni $S \to R$ sullo spazio, per poter calcolare la radiazione subita dalle particelle del corpo durante il movimento. Ma lo stesso movimento può essere descritto anche dal morfismo $T \to S^C$ che assegna a ciascun istante dell'intervallo fissato T la posizione $C \to S$ che il corpo occupa nello spazio in quell'istante; c'è, per esempio, il funzionale baricentro $S^C \to S$ (indotto da una distribuzione di massa su C e dalla struttura convessa di S) che può seguire il movimento al fine di calcolare $T \to S$, il movimento del centro di massa. Peraltro, poiché $T \times C \simeq C \times T$ è un isomorfismo canonico, un esempio diverso dell'aggiunzione relativa allo spazio di funzioni (la trasformazione che gli informatici chiamano "λ-conversione") mostra che lo stesso movimento può anche esser descritto da un morfismo $C \to S^T$, che associa ad ogni particella di C il suo cammino in S. Questo morfismo può essere a sua volta seguito, per esempio, dalla derivata newtoniana rispetto al tempo $S^T \to V^T$, dove V è lo spazio vettoriale delle traslazioni dello spazio piatto in cui S è immerso, in modo da ottenere $C \to V^T$, quindi $T \times C \to V$ e infine $T \to V^C$, che descrive l'evoluzione del *campo di velocità* su C (per ulteriori sviluppi, si veda [7]).

7 Dall'algebra alla logica

Quando $(\ )^B$ esiste per ogni B in $\mathcal{X}$, allora $\mathcal{X}$ è detta *cartesiana chiusa*. Per ogni categoria piccola $\mathcal{A}$, la categoria di funtori $\mathcal{S}^{\mathcal{A}^{op}}$ delle strutture $\mathcal{A}$-geometriche è cartesianamente chiusa, come può essere visto calcolando esplicitamente $Y^B(A)$ per mezzo del Lemma di Yoneda.
Nel caso particolare in cui la categoria piccola $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ sia chiusa rispetto ai prodotti cartesiani finiti, essa può essere usata per analizzare oggetti arbitrari di $\mathcal{X}$ in modo opposto rispetto alle "figure", cioè in termini di morfismi $X \to B$ (dove B è in $\mathcal{A}$) che possono essere indicati come *funzioni* (in senso stretto). I morfismi $B \to B'$ agiscono allora come *operazioni algebriche* su queste funzioni e, in particolare, le operazioni di tipo $B \times B \to B$ possono essere applicate a *coppie* di funzioni su X, ecc. Sfruttando l'associatività riferita a:

$$X \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{g} B \xrightarrow{\beta} B'$$

otteniamo un funtore:

$$\mathcal{X} \to (\mathcal{S}^{\mathcal{A}})^{op}$$

che assegna a un arbitrario oggetto X la $\mathcal{A}$-algebra $\mathcal{A}^X$ di tutte le funzioni su X a valori in $\mathcal{A}$, strutturata da tutte le operazioni β di $\mathcal{A}$, e che assegna ad ogni morfismo ϕ l'omomorfismo ϕ^* di $\mathcal{A}$-algebre nella direzione opposta:

$$\phi^*(g) = g\phi.$$

In tal modo, quasi ogni categoria può essere analizzata in termini di strutture algebriche. $\mathcal{A}$ risulta *coadeguata in* $\mathcal{X}$ se questo funtore è pieno e fedele, cioè se un arbitrario $\mathcal{A}$-omomorfismo dall'algebra delle funzioni di Y all'algebra delle funzioni di X è indotto da un unico morfismo $X \to Y$

in $\mathcal{X}$. L'algebra K delle funzioni sull'oggetto terminale 1 di $\mathcal{X}$ è formata dalle *costanti* di $\mathcal{A}$. Spesso $\mathcal{A}$ contiene una struttura di *semianello* (in inglese: "rig", dove la perdita della "n" nella parola "ring" sta a significare che non si richiede l'esistenza di quantità negative):

$$R \times R \rightrightarrows R \leftleftarrows 1$$

costituita da una addizione, una moltiplicazione, zero e uno, soddisfacenti gli usuali diagrammi di commutatività, associatività e distributività; se esiste anche un endomorfismo di R che si comporta come una "negazione" per l'addizione, allora il semianello è detto *anello*, mentre in altri casi importanti l'addizione è idempotente, nel senso che $x + x = x$, per ogni $T \xrightarrow{x} R$.
Questa idempotenza è soddisfatta, per esempio, quando R è uno "spazio di Sierpinski" con due soli punti, per cui le funzioni $X \to R$ possono essere considerate come nomi delle parti "aperte" di X, in modo tale che ogni morfismo $X \xrightarrow{\phi} Y$ in $\mathcal{X}$ è automaticamente "continuo" nel senso di questi aperti (vedi il box a pagina 48).
In questa e altre situazioni analoghe, i punti del semianello R servono come "valori di verità", le funzioni su X come "predicati" e le operazioni algebriche sono spesso chiamate "operazioni logiche" (proposizionali); d'altra parte, non si richiede alcuna restrizione simile su R affinché le funzioni su R determinino "sottosistemi" di X: per ogni punto α di R, le figure x per cui $f\,x \equiv \alpha$ costituiscono il sottosistema in cui "f è soddisfatto a livello α", come si usa, per esempio, nella teoria di Morse. In ogni caso, gli omomorfismi ϕ^* sono considerati spesso come operazioni di *sostituzione* e possono avere operazioni aggiunte nel caso in cui gli oggetti di $\mathcal{A}$ sono *categorie interne*; tali aggiunti sono *quantificatori* "nel senso di Kan" (cioè si applicano a funtori, e non esclusivamente a predicati). Se $\mathcal{A}$ consiste invece nell'usuale struttura di anello sui numeri *reali*, (cioè $R^n \to R^m$ è un morfismo in $\mathcal{A}$ se e solo se è una m-upla di polinomi in n indeterminate a coefficienti reali), allora $\mathcal{A}$ è coadeguata in $\mathcal{S}$, o addirittura nella categoria degli spazi metrizzabili e delle funzioni continue tra essi, purché non esistano cardinali di Ulam (cosiddetti "misurabili").

8 La nozione di spettro collega le dottrine dell'algebra generale e della teoria dei fasci

Prendendo come $\mathcal{X}$ proprio $\mathcal{S}^{\mathcal{A}^{op}}$, esiste allora una coppia di funtori aggiunti:

$$\mathcal{S}^{\mathcal{A}^{op}} \rightleftarrows (\mathcal{S}^{\mathcal{A}})^{op}$$

che collegano il topos delle strutture geometriche alla categoria opposta a quella delle strutture algebriche, per ogni data categoria piccola $\mathcal{A}$, che si ottiene dalla immersione canonica di Yoneda di $\mathcal{A}$ in entrambe le categorie di funtori. L'aspetto geometrico di ogni algebra Q è spesso chiamato *spettro* di Q: le figure di forma A in *spec*(Q) sono proprio gli omomorfismi da Q all'algebra delle funzioni di A (per esempio, i "punti razionali" di *spec*(Q) sono gli omomorfismi verso l'algebra K delle costanti, $K = \mathcal{X}(1, R)$). La composizione dei due aggiunti assegna a ciascun X un "completamento":

$$X \to \hat{X} = hom_{\mathcal{A}}\left(\mathcal{A}^X, \mathcal{A}\right)$$

munito di un'applicazione naturale per cui:

$$\hat{x}(f) = f(x) \quad \text{per ogni } f \text{ in } \mathcal{A}^X.$$

L'idea è che ogni omomorfismo $\mathcal{A}^X \to \mathcal{A}$ può essere pensato come la valutazione virtuale su una figura di X; la coadeguatezza (della potenza di calcolo di $\mathcal{A}$) per X significherebbe che X è completo, nel senso che ogni figura virtuale messa a disposizione da $\mathcal{A}$ è realizzata senza ambiguità come $\hat{x}$ da una vera figura x. Dualmente, ogni Q ha un morfismo di completamento:

$$Q \xrightarrow{\wedge} \hat{Q} = \mathcal{A}^{spec(Q)}$$

che esprime fino a che punto le quantità limite, che obbediscono solo alla richiesta formale di variazione naturale sullo spettro, possano o no essere già state dotate di nome in un sistema originario Q di quantità. Non sempre è il caso di richiedere che questi morfismi di completamento siano degli isomorfismi, perché ci sono importanti spazi (come lo spazio algebrico proiettivo) che sono più complicati delle risorse espressive di una singola $\mathcal{A}$-algebra. Categorie geometriche e algebriche, che funzionano in maniera più duttile, possono essere definite per mezzo del seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
Geom\,(\mathcal{A}) \arrow[r, shift left] \arrow[d] & Alg\,(\mathcal{A})^{op} \arrow[l, shift left] \arrow[d] \\
\mathcal{S}^{\mathcal{A}^{op}} \arrow[r, shift left] & (\mathcal{S}^{\mathcal{A}})^{op} \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

DOSSIER

45

in cui *geom*($\mathcal{A}$) è un *topos* e *alg*($\mathcal{A}$) è una *categoria algebrica*, nel senso che definiremo qui di seguito. Sia i topos che le categorie algebriche appartengono a una classe più vasta di categorie, che hanno *limiti finiti* e *colimiti filtrati* che *commutano* reciprocamente, per ragioni di chiusura cartesiana nel caso dei topos e per ragioni di finitarietà delle operazioni nel caso algebrico.

Come ogni aggiunzione, quella geometrico-algebrica permette la costruzione di una categoria molto più grande, con oggetti E che incorporano internamente i due aspetti; in questo caso le due descrizioni di un tale oggetto si unificano in una terza descrizione, cioè ogni "spazio" incognito E dovrebbe dar luogo sia a un "insieme inferiore" X (di figure con forme in $\mathcal{A}$), sia a un "insieme superiore" Q (di funzioni con valori in $\mathcal{A}$). Quindi si può considerare una categoria $\mathcal{E}$ molto grande, che possiamo chiamare l' "inviluppo doppio" di $\mathcal{A}$, in cui ogni oggetto E è ottenuto a partire da tre ingredienti: un X "arbitrario", un Q "arbitrario" e la struttura addizionale data da un accoppiamento naturale:

$$X(A)\times Q(B)\xrightarrow{\bullet}\mathcal{A}(A,B)$$

che associa in modo compatibile una quantità/figura concreta $A\to B$ a ciascuna coppia costituita da una figura e da una funzione dello "spazio" E in questione. (Nel caso speciale in cui $\mathcal{A}$ sia un insieme parzialmente ordinato, come quello dei numeri razionali, questa categoria $\mathcal{E}$ fornisce un approfondimento della costruzione di Dedekind dei numeri reali. Inoltre una figura x in $X(A)$ può essere vista come una dimostrazione che $A \leq E$ e una "funzione" f in $Q(B)$ come una dimostrazione che $E \leq B$, mentre il valore di $f \bullet x$ come una prova che $A \leq B$ in $\mathcal{A}$ stessa). Si definiscono i morfismi di $\mathcal{E}$ come coppie di trasformazioni naturali opposte (naturali su $\mathcal{A}^{op}$ e su $\mathcal{A}$ rispettivamente), che inoltre conservano gli accoppiamenti dati. Questa costruzione è stata usata da G. Mackey nella sua tesi del 1945 e in molti testi successivi di analisi funzionale, dove viene discussa la teoria della dualità per spazi vettoriali topologici. (Il risultato basilare della tesi era che, se $\mathcal{A}$ è la categoria formata dagli spazi vettoriali reali di *dimensione finita* e dalle trasformazioni lineari tra essi, allora la categoria $\mathcal{E}$ così costruita contiene come sottocategorie *piene* la categoria degli spazi di Banach e molte altre; il succo della questione è che i funzionali lineari continui possono sostituire le funzioni caratteristiche degli aperti nello specificare quali trasformazioni lineari sono continue).

La dottrina dell'*algebra generale* considera ogni categoria $\mathcal{A}$ con prodotti finiti come un possibile generale astratto il cui corrispondente generale concreto è la sottocategoria piena:

$$alg(\mathcal{A})\to \mathcal{S}^{\mathcal{A}}$$

costituita dai funtori Q che conservano i prodotti finiti, nel senso che valgono:

$$Q(B_1\times B_2)\xrightarrow{\sim}Q(B_1)\times Q(B_2) \text{ e } Q(1)\xrightarrow{\sim}1.$$

Nel caso in cui gli oggetti di $\mathcal{A}$ siano semplicemente le potenze finite di un singolo oggetto R, si dice che $\mathcal{A}$ è una *teoria algebrica* a una sola sorta (per esempio, le teorie algebriche dei gruppi, semianelli, reticoli, algebre di Lie, ecc. possono essere *presentate* prendendo la categoria opposta a quella delle algebre libere finitamente generate).

Tutte quante le categorie algebriche *alg*($\mathcal{A}$) soddisfano proprietà di *esattezza*, che collegano le congruenze con le suriezioni omomorfe (com'è ben noto nella categoria dei gruppi e in quella degli anelli) e in particolare possiedono una *fattorizzazione attraverso l'immagine* di ogni omomorfismo in un omomorfismo suriettivo seguito da uno iniettivo, che è molto stabile.

Ogni categoria algebrica *alg*($\mathcal{A}$) soddisfa anche una forma forte del teorema degli zeri di Hilbert ("Nullstellensatz") che è stata dimostrata da Garrett Birkhoff negli anni '30. Benché la validità generale di questo "Nullstellensatz" sia equivalente al Lemma di Zorn, in casi concreti di algebre Q finitamente generate, essa conduce a un'analisi dettagliata di *spec*(Q) in termini di figure "sottodirettamente irriducibili" che generalizzano le algebre "semplici", in modo che tali figure meritano ancora di essere considerate come "punti" generalizzati e, ciò nonostante, sono sufficienti a fornire almeno una rappresentazione fedele di Q nel suo "completamento di Birkhoff".

Una dottrina assicura non solo i mezzi per concretizzare i suoi generali astratti, ma anche i mezzi per confrontarli tra loro; nel caso dell'algebra generale, i funtori che conservano i prodotti $\mathcal{A}\xrightarrow{\Phi}\mathcal{B}$ sono le *interpretazioni* naturali di una teoria algebrica in un'altra. Tali interpretazioni possono anche essere presentate sintatticamente (quando $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono presentate con simboli di operazioni e con assiomi equazionali). Le sostituzioni semantiche associate Φ^* hanno sempre aggiunti sinistri $\Phi_!$:

$$alg(\mathcal{A}) \underset{\Phi_!}{\overset{\Phi^*}{\rightleftarrows}} alg(\mathcal{B})$$

che estendono Φ^{op}. Molte costruzioni algebriche fondamentali, come quella delle algebre inviluppanti di algebre di Lie o di gruppi, quella dell'estensione degli scalari, ecc., sono esempi di "quantificatori" di questo tipo, lungo interpretazioni Φ. È facile rendersi conto che, per ogni X in $\mathcal{S}^{\mathcal{A}^{op}}$, il corrispondente sistema $\mathcal{A}^{\mathcal{X}}$ di funzioni a valori in $\mathcal{A}$ si trova di fatto in $alg(\mathcal{A}) \subset \mathcal{S}^{\mathcal{A}}$.

La dottrina della *teoria dei fasci* concretizza una qualsiasi categoria astratta $\mathcal{A}$ munita di una *topologia di Grothendieck*, come la categoria:

$$sh(\mathcal{A}) \subset \mathcal{S}^{\mathcal{A}^{op}}$$

di quei funtori X che soddisfano la seguente condizione di fascio. Data una copertura $\mathcal{U}$ di A e dato un morfismo naturale $\mathcal{U} \to X$, esiste un'unica figura x di forma A la cui restrizione a $\mathcal{U}$ è il morfismo naturale dato. Qui, per copertura s'intende un sottofuntore $\mathcal{U}(C) \subseteq \mathcal{A}(C, A)$, cioè chiuso rispetto alla composizione con ogni $C' \to C$; e una topologia di Grothendieck specifica quali di questi $\mathcal{U}$ debbono essere considerati coperture.

La dottrina in questione richiede che, se $\mathcal{U}$ è una copertura di A e se $B \xrightarrow{\alpha} A$ è un qualsiasi morfismo di $\mathcal{A}$, allora $\alpha^*\mathcal{U}$, che per definizione consiste di tutti i $C \xrightarrow{b} B$ per cui αb è in $\mathcal{U}$, è una copertura di B. Questa condizione implica che $sh(\mathcal{A})$ è sempre un *topos*. La più forte topologia di Grothendieck su $\mathcal{A}$, per cui $spec(Q)$ risulti essere un fascio per ogni Q in $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}$, è la topologia *canonica* su $\mathcal{A}$ (si può mostrare che essa ha come ricoprimenti di A solo quelle famiglie epimorfe di morfismi di $\mathcal{A}$ che sono "universalmente effettive" su A). Se con $geom(\mathcal{A}) = sh(\mathcal{A})$ denotiamo il topos dei fasci per la nozione canonica di copertura, allora la restrizione dell'aggiunzione "algebra delle funzioni/spettro delle figure" analizza almeno $\mathcal{A}$, ma normalmente anche una ben più ampia categoria $\mathcal{C}$ di oggetti opportuni. Sebbene non ogni oggetto X in $geom(\mathcal{A})$ sia determinato da una singola algebra, esso risulta tuttavia un amalgama (colimite) di quelli che sono così determinati, proprio come uno spazio proiettivo è l'unione di pochi spazi affini.

I topos, come $geom(\mathcal{A})$ appena descritto, sono sempre categorie cartesiane chiuse e inoltre possiedono un oggetto semianello Ω (di fatto un reticolo distributivo con ulteriori proprietà), caratterizzato dalla seguente proprietà: per ogni oggetto X, qualsiasi sottosistema di X che sia rappresentabile da un singolo morfismo iniettivo $S \to X$ è determinato da un'unica funzione $X \xrightarrow{f} \Omega$ nella categoria. Non solo la moltiplicazione (o congiunzione) $\Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega$ è determinata univocamente da questa proprietà (la quale identifica il sottosistema che consiste solo di $< 1, 1 >$), ma è utile anche per definire il sottosistema Ω_1 di $\Omega \times \Omega$ che corrisponde alla relazione di inclusione tra sottosistemi di ogni X e rende Ω un oggetto categoria. Ω_1 è a sua volta determinato da una unica operazione $\Omega \times \Omega \xrightarrow{\Rightarrow} \Omega$ di *implicazione*, il che a sua volta significa che la collezione $Sub(X)$ dei sottosistemi rappresentabili di ogni X dato ha la struttura di una *algebra di Heyting*: infatti, per ogni S, T, U in $Sub(X)$:

$$S \wedge T \subseteq U \textit{ se e solo se } T \subseteq (S \Rightarrow U).$$

Le algebre di funzioni a valori in Ω possono essere internalizzate usando la chiusura cartesiana.

Per ogni $X \xrightarrow{\phi} Y$, l'omomorfismo indotto ϕ^* ha un aggiunto sinistro $\phi[\ ]$ e un aggiunto destro ϕ_*:

$$\begin{tikzcd} \Omega^X \arrow[r, shift left=3, "{\phi[\ ]}"] \arrow[r, shift right=3, "\phi_*"'] & \Omega^Y \arrow[l, "\phi^*"'] \end{tikzcd}$$

poiché ciascuno di essi corrisponde a un ben definito sottosistema di $\Omega^X \times Y$.

Questi aggiunti sono chiamati, rispettivamente, *quantificazione esistenziale* (o *immagine*) lungo ϕ e *quantificazione universale* lungo ϕ. Nel caso in cui $\phi = A^\sigma$ è un morfismo $X = A^I \to A^J = Y$ indotto da una trasformazione $J \xrightarrow{\sigma} I$ di "variabili", allora $\phi_*(S)(y)$ significa "per tutti gli x tali che $y = x\sigma$, $S(x)$", mentre il fatto che y sia nell'immagine $\phi[S]$ significa che "localmente" esistono degli x in S per cui $y = x\sigma$. In questo contesto, "localmente" si riferisce al fatto che, se B è la forma della figura y, la effettiva esistenza delle figure x si può avere solo su un ricoprimento di B.

Questo comportamento locale dell'"esistenza" in un topos riflette l'esperienza consolidata sia in analisi complessa (dove una funzione y "ha" un logaritmo complesso x, ma solo localmente), sia nella logica formale (dove, per esemplificare una affermazione esistenziale dimostrata, è a volte necessario introdurre più parametri). I quantificatori, come classicamente intesi, corrispondono alle proiezioni $\phi = A^\sigma$ indotte dall'inclusione $J \xrightarrow{\sigma} I$, dove J si ottiene da I omettendo un elemento, ma anche la diagonale A^σ da A a A^2 indotta dall'unico morfismo $2 \to 1$ è interessante: la quantificazione esistenziale lungo *questo* morfismo, applicata al predicato identicamente vero su A (= sottosistema totale) fornisce il predicato di *uguaglianza* su A come una funzione $A \times A \to \Omega$.

Questo a sua volta permette ulteriori costruzioni, come mono$(A, B) \to B^A$, lo spazio i cui punti "sono" i morfismi iniettivi da A a B. Il funtore definito da $P(X) = \Omega^X$, $P(\phi) = \phi[\ ]$

Topos e topologie di Grothendieck

Un *topos* è una categoria che possiede le due seguenti proprietà: è cartesiana chiusa e ha un oggetto "valori di verità" Ω. Cioè, si hanno internamente a disposizione sia spazi di funzioni (detti anche esponenziali) Y^X, muniti degli associati morfismi di valutazione, sia morfismi caratteristici $X \to \Omega$, corrispondenti alla totalità dei sottosistemi rappresentabili di un qualunque oggetto X, il che conduce a particolari oggetti potenza Ω^X che si conformano alla logica di Heyting. Un *topos di Grothendieck* è definibile come un topos che: 1) è appropriatamente correlato (mediante un tipo opportuno di funtori) a un topos S di insiemi astratti (cioè, a un topos che possiede un oggetto "numeri" naturali, è tale che gli epimorfismi si spezzano e ha esattamente due valori di verità); 2) contiene una sottocategoria adeguata, abbastanza piccola da poter essere parametrizzata da un oggetto di $\mathcal{S}$.

Si dimostra che tutte le categorie di funtori $\mathcal{S}^{\mathcal{A}^{op}}$, ove $\mathcal{A}$ è una categoria piccola, sono topos di Grothendieck nel senso ora indicato. Più in generale, alcune sottocategorie di tali categorie di funtori sono anch'esse topos; si tratta delle categorie di "fasci" su $\mathcal{A}$, relativamente a un'assegnata "topologia di Grothendieck", che (come è spiegato nella sezione 8) specifica quali sottofuntori (dei funtori rappresentabili che corrispondono agli oggetti A in $\mathcal{A}$) vanno considerati come "coperture". (Un'ampia trattazione delle categorie di fasci è fornita in [11]).

Per esempio, se $\mathcal{A} = \mathcal{Q}^{op}$, ove $\mathcal{Q}$ è l'insieme ordinato dei razionali, si possono pensare gli oggetti X di $\mathcal{S}^{\mathcal{Q}}$ come sistemi dinamici non-autonomi; in tal caso, l'insieme X_t è formato dagli stati possibili al tempo razionale t e la determinazione dinamica $X_t \to X_s$ è funtorialmente associata a ciascuna coppia $t < s$ di tempi razionali. Il funtore rappresentato da t consiste in tutti gli s tali che $t < s$; specificando che il suo sottofuntore U, che consiste in tutti gli s tali che $t < s$, è una copertura di t, si ottiene una topologia di Grothendieck davvero modesta, che dà un'unica copertura non banale di ogni oggetto di $\mathcal{A}$. I fasci per questa topologia di Grothendieck sono quei sistemi dinamici X nei quali ogni "futuro" ha un'unica causa nel senso seguente: se è dato uno stato x_s in X_s per ogni arbitrario $s < t$, in modo da formare una famiglia compatibile relativamente alle transizioni $X_s \to X_r$ per ogni $t<s<r$, allora esiste un unico stato x in X_t che si evolve in tutti i dati x_s. La categoria $\mathcal{R}$ di siffatti sistemi dinamici è un topos, il cui oggetto "valori di verità" è costituito dai numeri reali con l'aggiunta di ∞; il valore di verità di una proposizione interna è l'istante di tempo in cui essa diventa vera (restando tale da allora in poi). Questa è in effetti una costruzione dei reali alla Dedekind, che rivela come ciascuno di essi sia un'astrazione di un sistema dinamico.

è chiamato funtore insieme potenza interno; i punti di A parametrizzano i sotto-oggetti di X. Anche per $\mathcal{A}$ molto piccole, le categorie *geom*($\mathcal{A}$) conterranno le nozioni "corrette" di morfismo fra spazi di dimensione superiore (e infinita). Per esempio, $\mathcal{A}$ potrebbe essere costituita proprio dagli endomorfismi lisci della retta, con la struttura di categoria data dalla composizione usuale o "sostituzione": la categoria *geom*($\mathcal{A}$) che ne risulta include adeguatamente tutte le varietà lisce, gli spazi di distribuzioni, ecc. Se invece si prende per $\mathcal{A}$ la categoria delle funzioni continue nel senso usuale tra sottoinsiemi chiusi della retta reale, la categoria *geom*($\mathcal{A}$) che ne risulta basta per tutte le applicazioni usuali della topologia geometrica e dell'analisi funzionale.

9 La geometria richiede estensioni della logica

Le grandi potenzialità dei topos per l'algebra e la geometria erano già chiare nei primi anni '60 a A. Grothendieck e ai suoi allievi. Il fatto che la maggior parte della teoria segua da pochi assiomi interni è stato discusso nel 1969 a Roma e nel 1970 al Congresso Internazionale di Nizza; dal lavoro di W. Lawvere, M. Tierney e C. Mikkelsen è emerso che di fatto bastano i soli due assiomi di chiusura cartesiana e di esistenza del "classificatore di sottoggetti" Ω. Questi sviluppi hanno prodotto almeno una dozzina di libri (per esempio [11]), che per lo più accentuano il ruolo della teoria dei topos come logica intuizionista di ordine superiore.

In matematica, poiché praticamente ogni costruzione di analisi geometrica, di combinatoria ecc., può essere "trasportata" dal topos degli insiemi astratti ad altri topos e poiché esistono topos che modellano praticamente ogni tipo di coesione e di variabilità degli "insiemi", si ha un intero corpo di risposte parziali a questioni quali "fino a che punto questo o quel risultato classico è stabile rispetto a una variazione continua di parametri addizionali?".

Contemporaneamente si ha una possibilità sistematica di semplificare enunciati, relegando lo sfondo nello sfondo, invece di trasportare ufficialmente la sua costruzione come un bagaglio in ogni discussione. Per esempio, l'"usuale" teoria dei gruppi fatta sullo sfondo di un topos liscio diventa la teoria di Lie e l'"usuale" algebra lineare fatta sullo sfondo di un topos bornologico diventa l'analisi funzionale.

In un topos liscio ogni oggetto ha figure infinitesimali, in modo che ogni morfismo ha un morfismo "derivato" nel senso del calcolo differenziale [12]. Un topos bornologico è un topos di Grothendieck, formato dai fasci sul sito che è la categoria di tutti gli insiemi numerabili, ove una copertura è semplicemente data da un'unione disgiunta finita. Tutti gli insiemi numerabili infiniti sono isomorfi e quindi è sufficiente considerare figure di un solo tipo, che possiamo chiamare "successioni limitate". Così, in un topos bornologico ogni oggetto è costituito dalle sue figure, che sono successioni limitate, e ogni morfismo conserva le successioni limitate. In altre parole, un oggetto bornologico non è altro che un'azione destra del monoide formato dalle endofunzioni arbitrarie dell'insieme N di indici per le successioni, soggetta alla sola condizione che, se prendiamo una partizione di N in un numero finito di celle, c'è un unico elemento, una successione limitata globalmente definita, che si restringe a una data successione limitata su ciascuna cella della partizione.

Affermare che in un topos liscio la teoria dei gruppi non è altro che la teoria di Lie e che l'"usuale" algebra lineare diventa, in un topos bornologico, l'analisi funzionale, può apparire assurdo rispetto alla teoria classica degli insiemi. Tuttavia queste affermazioni hanno già un'utilità ben consolidata e la fecondità di questa nuova linea di ricerca cresce via via che, attraverso l'analisi, si scoprono assiomi che descrivono nitidamente gli aspetti essenziali in base ai quali un topos liscio o bornologico si distingue dal topos degli insiemi astratti.

Sorprendentemente, questi assiomi matematici hanno spesso un carattere "logico", anche se esso va oltre la logica tradizionale. Per esempio, lo spazio Ω dei valori di verità può essere connesso (ma l'assioma di scelta lo forzerebbe a essere booleano, come ha mostrato R. Diaconescu). Per ogni oggetto X in un topos arbitrario esiste una nozione intrinseca di "sottoinsieme aperto", scoperta da

INSIEMI VARIABILI E INSIEMI COESIVI

Intorno al 1960, A. Grothendieck riunì sotto la denominazione di "topos" due tipi di situazioni che emergevano ricorrentemente in geometria algebrica e in topologia algebrica.

1) Fissato un particolare spazio, una qualsiasi famiglia di strutture algebriche parametrizzate in modo liscio dallo spazio (come quando si definisce un fibrato vettoriale) può esser vista come una singola struttura algebrica nella categoria degli *insiemi variabili* sullo spazio dato. Una tale categoria di insiemi variabili concretizza il modo in cui lo spazio può agire in rapporto alla parametrizzazione ed è anche possibile pensare una tale categoria come equivalente allo stesso spazio, soprattutto in considerazione del fatto che gli opportuni funtori tra categorie di insiemi variabili su spazi risultano essere equivalenti a funzioni continue tra gli spazi soggiacenti. Questa concezione, di ciò che uno spazio *è*, si presta a essere proficuamente generalizzata al di là della classica cornice di Hausdorff, basata su sottospazi aperti, perché si trova di fronte ad almeno due specie di situazioni più generali che fanno riferimento a insiemi variabili su un "generale astratto" di tipo spazio; la prima di esse riguarda uno spazio munito di un'azione di gruppo, la quale a sua volta partecipa della variazione (è una situazione che s'incontra sia in topologia algebrica che nella teoria ergodica); la seconda riguarda le superfici di Riemann in geometria algebrica, ove la mancanza di un teorema della funzione implicita impedisce di ridurle allo studio delle parti dello stesso spazio base (e questo fatto portò Grothendieck a sostituire le parti aperte con morfismi "*étale*").
2) Lo studio di molti spazi e delle loro relazioni in uno stesso ambito conduce a vederli come *insiemi coesivi* (e forse è proprio questo che Cantor intendeva con "*Mengen*"), i quali si possono classificare in diverse categorie di coesione, a seconda che questa sia di tipo misurabile, continuo, bornologico, differenziabile, olomorfo, algebrico e combinatorio. Per esempio, tanto il "*gros Zariski topos*" di Grothendieck quanto l'ampiamente utilizzata categoria degli insiemi simpliciali sono specifiche determinazioni di situazioni, come quelle su indicate, in cui si mette in rilievo una certa modalità di coesione degli insiemi. Elaborando il progetto teso a semplificare la teoria di Grothendieck, in vista del suo impiego nella dinamica differenziale dei continui, chi scrive si accorse a metà degli anni '60 che la suddetta teoria si poteva applicare anche alla teoria dei modelli per la logica intuizionistica e alla stessa teoria pura degli insiemi. Gli insiemi astratti (o "*Kardinalen*", nella terminologia di Cantor, oggi poco seguita) dovrebbero essere pensati come quelli con *coesione o variazione nulla*; mentre quest'idea non può mai essere pienamente assiomatizzata, formulazioni parziali di essa, in ordine di potenza crescente, sono:
   a) esistono abbastanza figure, il cui dominio risulta essere un sottoggetto di 1), per distinguere i morfismi tra due oggetti qualunque e questi oggetti subterminali formano un'algebra di Boole;
   b) ogni epimorfismo ha una sezione (condizione nota anche come Assioma di Scelta);
   c) l'Ipotesi generalizzata del continuo.

Anche se $c \Rightarrow b \Rightarrow a$ (come è stato dimostrato, rispettivamente, da K. Gödel e da R. Diaconescu), queste implicazioni non possono essere invertite, come emerge dai risultati di M. Tierney, M. Bunge e P. Freyd, che hanno portato a una riformulazione più semplice delle famose "dimostrazioni di indipendenza" iniziate da P. Cohen negli anni '60.

J. Penon e usata per chiarire la versione liscia del teorema della funzione implicita; questa stessa nozione è stata successivamente usata da O. Bruno, M. Bunge, E. Dubuc e F. Gago per chiarire la teoria delle equazioni differenziali e la classificazione delle singolarità. Ci sono oggetti D il cui funtore spazio-delle-funzioni $(\ )^D$ ha un ulteriore aggiunto destro $(\ )^{1/D}$, cioè una regola di trasformazione:

$$\frac{Y^D \to R}{Y \to R^{1/D}}$$

che permette di riesprimere i funzionali (per esempio, le Lagrangiane) come funzioni a valori in "nuovi" oggetti, che sono presenti nel topos; questi sono, in particolare, rappresentanti infinitesimali per fibrati di getti e per forme differenziali. Proprio servendosi di questo tipo di D, C. Minguez ha calcolato i prodotti di forme e I. Moerdijk e G. Reyes hanno dimostrato il teorema di de Rham. Piu in generale, (per relativizzazione, via il morfismo $D \to 1$), un "quantificatore universale", nel senso di un aggiunto destro ϕ_*, a un funtore sostituzione ϕ^* indotto da un morfismo ϕ, può possedere un ulteriore aggiunto destro $\phi^!$ in casi molto speciali.

Emersa fin dagli anni '50 come un linguaggio unificante, indispensabile per la geometria algebrica e la topologia algebrica, la teoria delle categorie è diventata, nelle mani di Grothendieck e di altri, anche un potente strumento per dimostrare teoremi. Le notevoli semplificazioni prodotte dalle ricerche degli ultimi decenni, unitamente alle sempre più insistenti necessità della pedagogia (si veda [6]) e dell'informatica, rendono oggi non solo possibile ma necessario il suo apprendimento. La persistente analisi di problemi matematici produce descrizioni particolarmente incisive a livello di categorie concrete, che integrano e approfondiscono le descrizioni tradizionali delle strutture matematiche che erano spesso a livello di generale astratto. Ogni successo in questa direzione segna un passo avanti verso lo scopo di formulare una teoria generale, il cui potere espressivo si avvicini al discorso filosofico e scientifico nel suo complesso, ma al contempo una teoria che sia anche radicata negli sviluppi più recenti della matematica e si fondi su una precisione che può essere (a seconda delle necessità) tranquillamente relegata nello sfondo o sguinzagliata alla ricerca di un'analisi ancor più approfondita.

Quest'articolo non avrebbe assunto la sua attuale forma senza l'assistenza di due amici, la cui profonda conoscenza della materia è stata di grande aiuto nel chiarirne il contenuto. L'esperta opera di traduzione di Aurelio Carboni ha suggerito di inserire numerosi chiarimenti. L'insistenza sistematica di Alberto Peruzzi sull'opportunità di più ampie spiegazioni e di formulazioni più nitide, sulla base delle sue personali intuizioni, ha portato a tanti miglioramenti che qui non è possibile elencare. Sono immensamente grato a entrambi questi studiosi. Qualunque oscurità possa sussistere è da ascrivere soltanto a me.

Bibliografia

[1] Carboni, A., Pedicchio, M.C. & Rosolini, G. (eds.), *Category Theory, Springer Lecture Notes in Mathematics* 1488, 1991

[2] Frölicher, A. & Kriegl, A., *Linear Spaces and Differentiation Theory*, Wiley, 1988

[3] Gray, J. (ed.), *Mathematical Applications of Category Theory*, American Mathematical Society, Contemporary Mathematics 30, 1984

[4] Kock, A. (ed.), *Category Theoretic Methods in Geometry*, Aarhus Universitet Matematisk Institut, Various Publications Series 35, 1983

[5] Kelly, G.M., Basic *Concepts of Enriched Category Theory*, London Mathematical Society Lecture Notes Series 64, 1982

[6] Lawvere, F.W. & Schanuel, S.H., *Conceptual Mathematics*, Cambridge University Press, 1997. (Traduzione italiana: *Categorie: un'introduzione alla matematica. Matematica Concettuale*, Franco Muzzio Editore, 1994)

[7] Lawvere, F.W. & Schanuel, S.H. (eds.), *Categories in Continuum Physics*, Springer Lecture Notes in Mathematics 1174, 1986

[8] Lawvere, F.W. "Metric Spaces, Closed Categories, and Generalized Logic", *Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano*, vol. XLIII, 1973, pp. 135-166

[9] Lawvere, F.W., "Introduction", *Model Theory and Topoi*, Springer Lecture Notes in Mathematics 445, 1975, pp. 3-14

[10] Lawvere, F.W., "Categories of Space and of Quantity", *The Space of Mathematics*, deGruyter, 1992, pp. 14-30

[11] Mac Lane, S. & Moerdijk, I., *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer-Verlag, 1992

[12] Moerdijk, I. & Reyes, G., *Models for Smooth Infinitesimal Analysis*, Springer-Verlag, 1991